Segunda Lista de exercícios de Métodos Numéricos
Prof. Mauro Rincon

1. Seja $b = [2, 1, -1]^t$ o vetor dos termos independentes e a matriz A definida abaixo:

$$A = \begin{vmatrix} 9 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

   (a) Calcule a inversa de A, A^{-1}, usando decomposição de Cholesky.

   (b) Determine a solução do sistema linear $Ax = b$, usando o Método dos Gradientes, com precisão $\epsilon \leq 1.10^{-2}$

   (c) Determine a solução do sistema linear $Ax = b$, usando o Método dos Gradientes Conjugados, com precisão $\epsilon \leq 1.10^{-2}$

   (d) Determine a solução do sistema linear $Ax = b$, usando o Método de Gauss-Jacobi, com precisão $\epsilon \leq 1.10^{-2}$

   (e) Determine a solução do sistema linear $Ax = b$, usando o Método de Gauss-Seidel, com precisão $\epsilon \leq 1.10^{-2}$

   (f) Usando a mesma aproximação inicial, compare os métodos Iterativos anteriores quanto ao número de iterações

   (g) Determine a decomposição da matriz pelo método de Crout e determine a solução.

   (h) Determine a decomposição da matriz pelo método de Cholesky e determine a solução.

2. Seja o sistema linear:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \end{cases}$$

   (a) Considerando a forma tridiagonal da matriz dos ceficientes, desenvolva um algoritmo ótimo, para resolver o sistema pelo Método de Eliminação de Gauss sem pivoteamento.

   (b) Suponha que a matriz acima é simétrica e definida positiva. Desenvolva um algoritmo ótimo para decompor a matriz pelo método de Cholesky.

Considere os valores numéricos: $a_{11} = a_{33} = 2$, $a_{12} = a_{21} = a_{34} = a_{43} = -1$, $a_{23} = a_{32} = a_{44} = 1$, $a_{22} = 3$, $b_1 = -5$, $b_2 = -7$, $b_3 = -6$, $b_4 = 1$.

(c) Determine a solução pelo algoritmo do item a.

(d) Determine o número total de operações de multiplicação e Adição.

(e) Verifique se a matriz dos coeficientes é definida positiva.

(f) Resolva o sistema acima pelo método dos gradientes conjugados.

(g) Faça uma análise da convergência dos métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel, para o sistema acima.

3. Considere uma matriz A de ordem $n \times n$, simétrica e definida positiva. Determine o número de operações de adição e multiplicação para decompor a matriz pelo método:

   (a) LU

   (b) Crout L^tDL

   (c) Cholesky

4. Seja h=0.5 e considere a integral:

$$\int_1^2 sen(\frac{2\pi}{x})dx$$

   (a) Calcule a integral pelo método dos trapézios, $I_t(h)$.

   (b) Calcule a integral pelo método dos trapézios, $I_t(h/2)$.

   (c) Calcule a integral pelo método 1/3 de Simpson $I_s(h)$.

   (d) Calcule a integral pelo método de Romberg, com precisão $O(h^4)$, ou seja calcule $R_1(h$.

   (e) Calcule a integral pelo método de Romberg, com precisão $O(h^6)$, ou seja calcule $R_2(h)$.

   (f) Calcule a integral pelo método da Quadratura Gaussiana com um ponto no interior.

   (g) Calcule a integral pelo método da Quadratura Gaussiana com dois pontos no interior.

   (h) Calcule a solução exata e compare com a solução aproximada obtida por todos os métodos anteriores.

5. Considere a integral abaixo:

$$\int_0^1 \int_{-1}^1 e^{-xy}\, dx\, dy \qquad y \in [0,1] \quad x \in [-1,1]$$

onde $h = x_{i+1} - x_i$ e $k = y_{j+1} - y_j$

   (a) Calcule a integral pelo método da quadratura Gaussiana com um ponto no interior.

   (b) Calcule a integral pelo método da quadratura Gaussiana com dois pontos no interior.

   (c) Considere $h = k = 1/2$. Calcule a integral pelo método de Romberg, com precisão $O(h^4, k^4)$, ou seja calcule $R_1(h,k)$.

   (d) Considere $h = k = 1/2$. Calcule a integral pelo método de Romberg, com precisão $O(h^6, k^6)$, ou seja calcule $R_2(h,k)$.

6. Considere a equação diferencial ordinária com valor inicial abaixo:

$$\begin{cases} y' - 2y + x = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Determine a solução numérica pelo método de Euler Aperfeiçoado, no ponto $x = 1.6$, com passo $h = 0.2$.

7. Considere a equação diferencial ordinária com valores de fronteira dados abaixo:

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = x \\ y(1) = 2, \qquad y(2) = 3, \end{cases}$$

Usando o método das diferenças finitas adiantadas nas duas derivadas determine a solução numérica do problema com passo $h = 0.25$.