METODOS NUMÉRICOS PARA O CALCULO DE INTEGRAL DE UMA VARIÁVEL.
COMPARANDO OS ERROS DOS MÉTODO DOS TRAPEZIOS, SIMPSON(/3), ROMBERG COM ORDEM h^4 e h^6 E O S MÉTODOS DA GAUSSIANA COM UM, DOIS E TRÊS PONTOS,

MÉTODO DOS TRAPÉZIOS

EXEMPLO1

```
> restart:
> with(plots):
> with(linalg):
> f:=x->(exp(-x^2));
```

$$x \rightarrow e^{-x^2} \quad (1)$$

```
> int(f(x), x=0..1 ):;
> exato:=evalf(%);
```

$$0.7468241330 \quad (2)$$

Ith=It(h) é o método dos trapézios com base h

```
> h:=(x[N]-x[0])/N:;
> N:=2:;
> x[0]:=0.0:;
> x[N]:=1.0:;
> Itt:=0:;
> Itt:= (f(x[0])+f(x[N])):;
> for i from 1 to N-1 do
> x[i]:=x[i-1]+h:;
> Itt:= Itt+2*f(x[i]):;
> od:;
> Ith:=h/2*Itt;
```

$$0.7313702520 \quad (3)$$

Itk=It(h/2) é o método dos trapézios com base h/2

```
> M:=2*N:
> x[M]:=1.0:;
> h2:=(x[M]-x[0])/M:;
> x[0]:=0.0:;
> Itt:=0:;
> for i from 1 to M-1 do
> x[i]:=x[i-1]+h2:;
> Itt:= Itt+2*f(x[i]):;
> od:;
```

```
> Itt0:= (f(x[0])+f(x[M])):;
> Ith2:=h/2*(Itt+Itt0);
```
0.7429840980 (4)

Itk=It(h/4) é o método dos trapézios com base h3=h/4=0.125

```
> M:=4*N:;
> x[M]:=1.0:;
> h3:=(x[M]-x[0])/M:;
> x[0]:=0.0:;
> Itt:=0:;
> for i from 1 to M-1 do
> x[i]:=x[i-1]+h3;
> Itt:= Itt+2*f(x[i]):;
> od:;
> Itt0:= (f(x[0])+f(x[M])):;
> INt:=Itt+Itt0:;
> Ith3:=(h3/2)*INt;
```
0.7458656150 (5)

MÉTODO DE ROMBERG O(h^4) e O(h^6)

R1(H)=(4*It(h/2)-It(h))/3
com precisão O(h^4). R1 é o valor da integral pelo método de Romberg. Erro1, Erro2 e Erro3 são os erros comparado com trapezios, trapezios/2 e trapezios/4. Erro 4 , Erro5 e Erro 6 são Romberg de ordem 1 com ordem (h^4) e (h/2)^4 e Erro6 é Romberg de ordem 2 com ordem h^6.

```
> R1h:=(4*Ith2-Ith)/3;
```
0.7468553800 (6)

Ordem de precisão de O(h^4). Como h=1/2 então o erro é proporcional a k.(1/2)^4=k*1/16=k*0.0625

```
> R1h2:=(4*Ith3-Ith2)/3;
```
0.7468261206 (7)

Ordem de precisão de O(h2^4). Como h2=1/4 então o erro é proporcional a k.(1/4)^4=k*1/256=k*0.0039

```
> R2h:=(16*R1h2-R1h)/15;
```
0.7468241700 (8)

Ordem de precisão de O(h^6). Como h=1/2 então o erro é proporcional a k.(1/2)^6=k*1/64=k*0,015625

```
> Erro1:=abs(Ith-exato);
```
0.0154538810 (9)

```
> Erro2:=abs(Ith2-exato);
```
0.0038400350 (10)

```
> Erro3:=abs(Ith3-exato);
```
0.0009585180 (11)

```
> Erro4:=abs(R1h-exato);
```

0.0000312470 (12)

```
> Erro5:=abs(R1h2-exato);
```

0.0000019876 (13)

```
> Erro6:=abs(R2h-exato);
```

$3.70\ 10^{-8}$ (14)

MÉTODO DE ROMBERG O(h^6)

R1(h)=(4*It(h/2)-It(h))/3 e R1(h/2)=(4*It(h/4)-It(h/2))/3. R2(h)=16R1(h)-R1(h/2)/15 com precisão O(h^6). R2 é o valor da integral pelo método de Romberg. Erro1, Erro2 e Erro3 são os erros comparado com trapzios, trapezios/2 e Romberg.

Itj=It(h/4) é o método dos trapézios com base h/4

```
> L:=4*N:
> x[L]:=1.0:;
> j:=(x[L]-x[0])/L:;
> x[0]:=0.0:;
> Itt:=0:;
> Itt:= (f(x[0])+f(x[L])):;
> for i from 1 to L-1 do
> x[i]:=x[i-1]+j:;
> Itt:= Itt+2*f(x[i]):;
> od:;
> Itj:=j/2*Itt;
```

0.7458656150 (15)

```
> R1k:=(4*Itj-Ith3)/3;
```

0.7458656149 (16)

```
> Erro5:=abs(Itj-exato);
```

0.0009585180 (17)

```
> R2h:=(16*R1k-R1h)/15;
```

0.7457996306 (18)

```
> Erro1:=abs(R1h-exato);
```

0.0000312470 (19)

```
> Erro2:=abs(R1k-exato);
```

0.0009585181 (20)

```
> Erro3:=abs(R2h-exato);
```

0.0010245024 (21)

INTEGRAL DE SIMPSON(!/3) S(H)=h/3*{ f(x0) +4f(x1)+2f(x2)+4F(x3)+.....+f(x2N)}
Usando M=2 intervalos ou 4 subintevalos

```
> M:=2:
> x[M]:=1.0:;
> h:=(x[M]-x[0])/M:;
```

```
> x[0]:=0.0:;
> St2:=0:;
> St2:= (f(x[0])+f(x[M])):;
> for i from 1 to M-1 do
> St2:= St2+4*f(x[0]+(i-.5)*h)+2*f(x[0]+i*h):;
> od:;
> St2:=St2+4*f(x[0]+(M-0.5)*h):;
> St2:=h/6*St2;
```

$$0.7468553797 \tag{22}$$

```
> Erro1:=abs(St2-exato);
```

$$0.0000312467 \tag{23}$$

INTEGRAL DE SIMPSON(!/3)   S(H)=h/3*{ f(x0) +4f(x1)+2f(x2)+4F(x3)+.....+f(x2N)}
Usando M=4 intervalos 8 subintevalos

```
> M:=4:
> x[M]:=1.0:;
> h:=(x[M]-x[0])/M:;
> x[0]:=0.0:;
> St4:=0:;
> St4:= (f(x[0])+f(x[M])):;
> for i from 1 to M-1 do
> St4:= St4+4*f(x[0]+(i-.5)*h)+2*f(x[0]+i*h):;
> od:;
> St4:=St4+4*f(x[0]+(M-0.5)*h):;
> St4:=h/6*St4;
```

$$0.7468261208 \tag{24}$$

```
> Erro2:=abs(St4-exato);
```

$$0.0000019878 \tag{25}$$

INTEGRAL GAUSSIANA COM UM PONTO NO INTERIOR

MUDANÇA DE VARIÁVEL x(s)=((b-a)s + (b+a))/2. Integral_a^b f(x) dx

```
> a:=0:
> b:=1:
> f:=x->(exp(-x^2));
```

$$x \rightarrow e^{-x^2} \tag{26}$$

```
> g:=s->((b-a)*s +(b+a))/2:;
> dx:=(b-a)*1/2*ds:;
> s3:=2*g(0):;
```

```
> Gauss1:=(b-a)*1/2*(f(s3)):;
> evalf(%);
```

$$0.1839397206 \tag{27}$$

```
> Erro5:=abs(Gauss1-exato):;
> evalf(%);
```

$$0.5628844124 \tag{28}$$

observe que o resultao acima é muito ruim, ou seja Gaussina com um ponto para aproximar exponencial

INTEGRAL GAUSSIANA COM DOIS PONTOS NO INTERIOR

MUDANÇA DE VARIÁVEL x(s)=((b-a)s + (b+a))/2. Integral_a^b f(x) dx

```
> a:=0:
> b:=1:
> f:=x->(exp(-x^2));
```

$$x \to e^{-x^2} \tag{29}$$

```
> g:=s->((b-a)*s +(b+a))/2:;
> dx:=(b-a)*1/2:;
> s1:=g(-sqrt(3)/3):;
> s2:=g(sqrt(3)/3):;
> Gauss2:=dx*(f(s1)+f(s2)):;
> evalf(%);
```

$$0.7465946882 \tag{30}$$

```
> Erro5:=abs(Gauss2-exato):;
> evalf(%);
```

$$0.0002294448 \tag{31}$$

OBSERVE QUE O ERRO DIMINUI QUANDO USAMOS A GAUSSIANA COM DOIS PONTOS, QUANDO COMPARADA COM A GAUSSIANA COM UM PONTO

INTEGRAL GAUSSIANA COM TRÊS PONTOS NO INTERIOR

MUDANÇA DE VARIÁVEL x(s)=((b-a)s + (b+a))/2. Integral_a^b f(x) dx. Nesse caso temos os pontos x1=-sqrt(3/5)=-x2 e x3=0 com pessos de 5/9 em x1 e x2 e peso 8/9 no pontos x3.

```
> a:=0:
> b:=1:
> f:=x->(exp(-x^2));
```

$$x \to e^{-x^2} \tag{32}$$

```
> g:=s->((b-a)*s +(b+a))/2:;
> dx:=(b-a)*1/2:;
> s3:=g(-sqrt(3/5)):;
```

```
> s4:=g(sqrt(3/5)):;
> s5:=g(0):;
> Gauss3:=dx*(5/9*(f(s3)+f(s4))+8/9*f(s5)):;
> evalf(%);
```

$$0.7468145842 \quad (33)$$

```
> Erro5:=abs(Gauss3-exato):;
> evalf(%);
```

$$0.0000095488 \quad (34)$$

> ?
> ?
> ?
> ?

OBSERVE QUE O ERRO DIMINUI QUANDO USAMOS A GAUSSIANA COM TRÊS PONTOS, QUANDO COMPARADA COM A GAUSSIANA COM UM PONTO E DOIS PONTOS

EXEMPLO 2

MÉTODO DOS TRAPÉZIOS

```
> restart:
> with(plots):
> with(linalg):
> f:=x->(sin(x));
```

$$x \rightarrow \sin(x) \quad (35)$$

> π;

$$\pi \quad (36)$$

```
> int(f(x), x=0..Pi/2 ):;
> exato:=evalm(%);
```

$$1 \quad (37)$$

Ith=It(h) é o método dos trapézios com base h

```
> h:=(x[N]-x[0])/N:;
> N:=2:;
> x[0]:=0.0:;
> x[N]:=Pi/2.0:;
> Itt:=0:;
> Itt:= (f(x[0])+f(x[N])):;
> for i from 1 to N-1 do
> x[i]:=x[i-1]+h:;
```

```
> Itt:= Itt+2*f(x[i]):;
> od:;
> Ith:=h/2*Itt;
```

$$0.1250000000\,\pi\,\left(1. + 2\sin\left(0.2500000000\,\pi\right)\right) \quad (38)$$

```
> evalf(%);
```

$$0.9480594494 \quad (39)$$

Itk=It(h/2) é o método dos trapézios com base h/2

```
> M:=2*N:
> x[M]:=Pi/2.0:;
> h2:=(x[M]-x[0])/M:;
> x[0]:=0.0:;
> Itt:=0:;
> for i from 1 to M-1 do
> x[i]:=x[i-1]+h2:;
> Itt:= Itt+2*f(x[i]):;
> od:;
> Itt0:= (f(x[0])+f(x[M])):;
> Ith2:=h/2*(Itt+Itt0):
> evalf(%);
```

$$0.9871158012 \quad (40)$$

Itk=It(h/4) é o método dos trapézios com base h3=h/4=0.125

```
> M:=4*N:;
> x[M]:=Pi/2.0:;
> h3:=(x[M]-x[0])/M:;
> x[0]:=0.0:;
> Itt:=0:;
> for i from 1 to M-1 do
> x[i]:=x[i-1]+h3;
> Itt:= Itt+2*f(x[i]):;
> od:;
> Itt0:= (f(x[0])+f(x[M])):;
> INt:=Itt+Itt0:;
> Ith3:=evalf((h3/2)*INt);
```

$$0.9967851722 \quad (41)$$

MÉTODO DE ROMBERG O(h^4) e O(h^6)

R1(H)=(4*It(h/2)-It(h))/3
com precisão O(h^4). R1 é o valor da integral pelo método de Romberg. Erro1, Erro2 e Erro3 são os erros comparado com trapezios, trapezios/2 e trapezios/4. Erro 4 , Erro5 e Erro 6 são Romberg de ordem 1 com ordem (h^4) e (h/2)^4 e Erro6 é Romberg de ordem 2 com ordem h^6.

```
> R1h1:=(4*Ith2-Ith)/3;
```

(42)

$$0.08333333333\,\pi\,(2\sin(0.1250000000\,\pi) + 2\sin(0.2500000000\,\pi) + 2\sin(0.3750000000\,\pi) + 1.) - 0.04166666667\,\pi\,(1. + 2\sin(0.2500000000\,\pi)) \tag{42}$$

> *evalf*(%);

$$1.000134586 \tag{43}$$

Ordem de precisão de O(h^4). Como h=1/2 então o erro é proporcional a k.(1/2)^4=k*1/16=k*0.0625

```
> R1h2:=(4*Ith3-Ith2)/3;
```

$$1.329046896 - 0.02083333333\,\pi\,(2\sin(0.1250000000\,\pi) + 2\sin(0.2500000000\,\pi) + 2\sin(0.3750000000\,\pi) + 1.) \tag{44}$$

> *evalf*(%);

$$1.000008296 \tag{45}$$

Ordem de precisão de O(h2^4). Como h2=1/4 então o erro é proporcional a k.(1/4)^4=k*1/256=k*0.0039

```
> R2h:=(16*R1h2-R1h1)/15;
```

$$1.417650022 - 0.02777777778\,\pi\,(2\sin(0.1250000000\,\pi) + 2\sin(0.2500000000\,\pi) + 2\sin(0.3750000000\,\pi) + 1.) + 0.002777777778\,\pi\,(1. + 2\sin(0.2500000000\,\pi)) \tag{46}$$

> *evalf*(%);

$$0.9999998759 \tag{47}$$

Ordem de precisão de O(h^6). Como h=1/2 então o erro é proporcional a k.(1/2)^6=k*1/64=k*0,015625

```
> Erro1:=abs(Ith-exato);
```

$$-0.1250000000\,\pi\,(1. + 2\sin(0.2500000000\,\pi)) + 1 \tag{48}$$

> *evalf*(%);

$$0.0519405506 \tag{49}$$

```
> Erro2:=abs(Ith2-exato);
```

$$-0.06250000000\,\pi\,(2\sin(0.1250000000\,\pi) + 2\sin(0.2500000000\,\pi) + 2\sin(0.3750000000\,\pi) + 1.) + 1 \tag{50}$$

> *evalf*(%);

$$0.0128841988 \tag{51}$$

```
> Erro3:=abs(Ith3-exato);
```

$$0.0032148278 \tag{52}$$

> *evalf*(%);

$$0.0032148278 \tag{53}$$

```
> Erro4:=abs(R1h-exato);
```

$$|R1h - 1| \tag{54}$$

> *evalf*(%);

$$|R1h - 1.| \tag{55}$$

```
> Erro5:=abs(R1h2-exato);
```

$$0.329046896 - 0.02083333333\,\pi\,(2\sin(0.1250000000\,\pi) + 2\sin(0.2500000000\,\pi) + 2\sin(0.3750000000\,\pi) + 1.) \tag{56}$$

> *evalf*(%);

$$0.0000082956 \tag{57}$$

```
> Erro6:=abs(R2h-exato);
```

(58)

$$-0.417650022+0.02777777778\,\pi\,(2\sin(0.1250000000\,\pi)+2\sin(0.2500000000\,\pi)+2\sin(0.3750000000\,\pi)+1.)-0.002777777778\,\pi\,(1.+2\sin(0.2500000000\,\pi)) \tag{58}$$

> *evalf*(%);

$$1.2413\ 10^{-7} \tag{59}$$

MÉTODO DE ROMBERG O(h^6)

R1(h)=(4*It(h/2)-It(h))/3 e R1(h/2)=(4*It(h/4)-It(h/2))/3. R2(h)=16R1(h)-R1(h/2)/15 com precisão O(h^6). R2 é o valor da integral pelo método de Romberg. Erro1, Erro2 e Erro3 são os erros comparado com trapzios, trapezios/2 e Romberg.

Itj=It(h/4) é o método dos trapézios com base h/4

```
> L:=4*N:
> x[L]:=Pi/2.0:;
> j:=(x[L]-x[0])/L:;
> x[0]:=0.0:;
> Itt:=0:;
> Itt:= (f(x[0])+f(x[L])):;
> for i from 1 to L-1 do
> x[i]:=x[i-1]+j:;
> Itt:= Itt+2*f(x[i]):;
> od:;
> Itj:=j/2*Itt;
```

$$0.03125000000\,\pi\,(2\sin(0.06250000000\,\pi)+2\sin(0.1250000000\,\pi)+2\sin(0.1875000000\,\pi)+2\sin(0.2500000000\,\pi)+2\sin(0.3125000000\,\pi)+2\sin(0.3750000000\,\pi)+2\sin(0.4375000000\,\pi)+1.) \tag{60}$$

> *evalf*(%);

$$0.9967851722 \tag{61}$$

```
> R1k:=(4*Itj-Ith2)/3;
```

$$0.04166666667\,\pi\,(2\sin(0.06250000000\,\pi)+2\sin(0.1250000000\,\pi)+2\sin(0.1875000000\,\pi)+2\sin(0.2500000000\,\pi)+2\sin(0.3125000000\,\pi)+2\sin(0.3750000000\,\pi)+2\sin(0.4375000000\,\pi)+1.)-0.02083333333\,\pi\,(2\sin(0.1250000000\,\pi)+2\sin(0.2500000000\,\pi)+2\sin(0.3750000000\,\pi)+1.) \tag{62}$$

> *evalf*(%);

$$1.000008296 \tag{63}$$

```
> Erro5:=abs(Itj-exato);
```

$$-0.03125000000\,\pi\,(2\sin(0.06250000000\,\pi)+2\sin(0.1250000000\,\pi)+2\sin(0.1875000000\,\pi)+2\sin(0.2500000000\,\pi)+2\sin(0.3125000000\,\pi)+2\sin(0.3750000000\,\pi)+2\sin(0.4375000000\,\pi)+1.)+1 \tag{64}$$

> ?

> *evalf*(%);

$$0.0032148278 \tag{65}$$

```
> R2h:=(16*R1k-R1h1)/15;
```

$0.04444444445\,\pi\,(2\sin(0.06250000000\,\pi)+2\sin(0.1250000000\,\pi)$
$+2\sin(0.1875000000\,\pi)+2\sin(0.2500000000\,\pi)+2\sin(0.3125000000\,\pi)$
$+2\sin(0.3750000000\,\pi)+2\sin(0.4375000000\,\pi)+1.)$
$-0.02777777778\,\pi\,(2\sin(0.1250000000\,\pi)+2\sin(0.2500000000\,\pi)$
$+2\sin(0.3750000000\,\pi)+1.)+0.002777777778\,\pi\,(1.+2\sin(0.2500000000\,\pi))$ **(66)**

> *evalf*(%);

0.9999998769 **(67)**

```
> Erro1:=abs(R1h1-exato);
```

$0.08333333333\,\pi\,(2\sin(0.1250000000\,\pi)+2\sin(0.2500000000\,\pi)$
$+2\sin(0.3750000000\,\pi)+1.)-0.04166666667\,\pi\,(1.+2\sin(0.2500000000\,\pi))-1$ **(68)**

> *evalf*(%);

0.000134586 **(69)**

```
> Erro2:=abs(R1k-exato);
```

$0.04166666667\,\pi\,(2\sin(0.06250000000\,\pi)+2\sin(0.1250000000\,\pi)$
$+2\sin(0.1875000000\,\pi)+2\sin(0.2500000000\,\pi)+2\sin(0.3125000000\,\pi)$
$+2\sin(0.3750000000\,\pi)+2\sin(0.4375000000\,\pi)+1.)$
$-0.02083333333\,\pi\,(2\sin(0.1250000000\,\pi)+2\sin(0.2500000000\,\pi)$
$+2\sin(0.3750000000\,\pi)+1.)-1$ **(70)**

> *evalf*(%);

0.000008296 **(71)**

```
> Erro3:=abs(R2h-exato);
```

$-0.04444444445\,\pi\,(2\sin(0.06250000000\,\pi)+2\sin(0.1250000000\,\pi)$
$+2\sin(0.1875000000\,\pi)+2\sin(0.2500000000\,\pi)+2\sin(0.3125000000\,\pi)$
$+2\sin(0.3750000000\,\pi)+2\sin(0.4375000000\,\pi)+1.)$
$+0.02777777778\,\pi\,(2\sin(0.1250000000\,\pi)+2\sin(0.2500000000\,\pi)$
$+2\sin(0.3750000000\,\pi)+1.)-0.002777777778\,\pi\,(1.+2\sin(0.2500000000\,\pi))+1$ **(72)**

> *evalf*(%);

$1.231\ 10^{-7}$ **(73)**

INTEGRAL DE SIMPSON(!/3)   S(H)=h/3*{ f(x0) +4f(x1)+2f(x2)+4F(x3)+.....+f(x2N)}
Usando M=2 intervalos ou 4 subintevalos

```
> M:=2:
> x[M]:=Pi/2.0:;
> h:=(x[M]-x[0])/M:;
> x[0]:=0.0:;
> St2:=0:;
> St2:= (f(x[0])+f(x[M])):;
> for i from 1 to M-1 do
> St2:= St2+4*f(x[0]+(i-.5)*h)+2*f(x[0]+i*h):;
> od:;
> St2:=St2+4*f(x[0]+(M-0.5)*h):;
```

```
> St2:=h/6*St2;
```

$$0.04166666667\,\pi\,\big(1.+4\sin(0.1250000000\,\pi)+2\sin(0.2500000000\,\pi)+4\sin(0.3750000000\,\pi)\big) \qquad (74)$$

```
> evalf(%);
```

$$1.000134585 \qquad (75)$$

```
> Erro1:=abs(St2-exato);
```

$$0.04166666667\,\pi\,\big(1.+4\sin(0.1250000000\,\pi)+2\sin(0.2500000000\,\pi)+4\sin(0.3750000000\,\pi)\big)-1 \qquad (76)$$

```
> evalf(%);
```

$$0.000134585 \qquad (77)$$

INTEGRAL DE SIMPSON(!/3)   S(H)=h/3*{ f(x0) +4f(x1)+2f(x2)+4F(x3)+.....+f(x2N)}
Usando M=4 intervalos 8 subintevalos

```
> M:=4:
> x[M]:=Pi/2.0:;
> h:=(x[M]-x[0])/M:;
> x[0]:=0.0:;
> St4:=0:;
> St4:= (f(x[0])+f(x[M])):;
> for i from 1 to M-1 do
> St4:= St4+4*f(x[0]+(i-.5)*h)+2*f(x[0]+i*h):;
> od:;
> St4:=St4+4*f(x[0]+(M-0.5)*h):;
> St4:=h/6*St4;
```

$$0.02083333333\,\pi\,\big(1.+4\sin(0.06250000000\,\pi)+2\sin(0.1250000000\,\pi)+4\sin(0.1875000000\,\pi)+2\sin(0.2500000000\,\pi)+4\sin(0.3125000000\,\pi)+2\sin(0.3750000000\,\pi)+4\sin(0.4375000000\,\pi)\big) \qquad (78)$$

```
> evalf(%);
```

$$1.000008295 \qquad (79)$$

```
> Erro2:=abs(St4-exato);
```

$$0.02083333333\,\pi\,\big(1.+4\sin(0.06250000000\,\pi)+2\sin(0.1250000000\,\pi)+4\sin(0.1875000000\,\pi)+2\sin(0.2500000000\,\pi)+4\sin(0.3125000000\,\pi)+2\sin(0.3750000000\,\pi)+4\sin(0.4375000000\,\pi)\big)-1 \qquad (80)$$

```
> evalf(%);
```

$$0.000008295 \qquad (81)$$

INTEGRAL GAUSSIANA COM UM PONTO NO INTERIOR

MUDANÇA DE VARIÁVEL x(s)=((b-a)s + (b+a))/2. Integral_a^b f(x) dx

```
> a:=0:
```

```
> b:=Pi/2:
> f:=x->(sin(x));
```

$$x \rightarrow \sin(x) \quad \textbf{(82)}$$

```
> g:=s->((b-a)*s +(b+a))/2:;
> dx:=(b-a)*1/2*ds:;
> s3:=2*g(0):;
> Gauss1:=(b-a)*1/2*(f(s3)):;
> evalf(%);
```

$$0.7853981635 \quad \textbf{(83)}$$

```
> Erro5:=abs(Gauss1-exato):;
> evalf(%);
```

$$0.2146018365 \quad \textbf{(84)}$$

observe que o resultao acima é muito ruim, ou seja Gaussina com um ponto para aproximar exponencial

INTEGRAL GAUSSIANA COM DOIS PONTOS NO INTERIOR

MUDANÇA DE VARIÁVEL x(s)=((b-a)s + (b+a))/2. Integral_a^b f(x) dx

```
> a:=0:b:=Pi/2:
> f:=x->(sin(x));
```

$$x \rightarrow \sin(x) \quad \textbf{(85)}$$

```
> g:=s->((b-a)*s +(b+a))/2:;
> dx:=(b-a)*1/2:;
> s1:=g(-sqrt(3)/3):;
> s2:=g(sqrt(3)/3):;
> Gauss2:=dx*(f(s1)+f(s2)):;
> evalf(%);
```

$$0.9984726138 \quad \textbf{(86)}$$

```
> Erro5:=abs(Gauss2-exato):;
> evalf(%);
```

$$0.0015273862 \quad \textbf{(87)}$$

OBSERVE QUE O ERRO DIMINUI QUANDO USAMOS A GAUSSIANA COM DOIS PONTOS, QUANDO COMPARADA COM A GAUSSIANA COM UM PONTO

INTEGRAL GAUSSIANA COM TRÊS PONTOS NO INTERIOR

MUDANÇA DE VARIÁVEL x(s)=((b-a)s + (b+a))/2. Integral_a^b f(x) dx. Nesse caso temos os pontos x1=-sqrt(3/5)=-x2 e x3=0 com pessos de 5/9 em x1 e x2 e peso 8/9 no pontos x3.

```
> a:=0:
> b:=Pi/2:
> f:=x->(sin(x));
```

$$x \rightarrow \sin(x) \quad (88)$$

```
> g:=s->((b-a)*s +(b+a))/2:;
> dx:=(b-a)*1/2:;
> s3:=g(-sqrt(3/5)):;
> s4:=g(sqrt(3/5)):;
> s5:=g(0):;
> Gauss3:=dx*(5/9*(f(s3)+f(s4))+8/9*f(s5)):;
> evalf(%);
```

$$1.000008121 \quad (89)$$

```
> Erro5:=abs(Gauss3-exato):;
> evalf(%);
```

$$0.000008121 \quad (90)$$

> ?

OBSERVE QUE O ERRO DIMINUI QUANDO USAMOS A GAUSSIANA COM TRÊS PONTOS, QUANDO COMPARADO COM A GAUSSIANA COM UM PONTO E DOIS PONTOS