Exercícios de Cálculo Numérico
Zero de Função

1. Dê um exemplo de função $f(x)$, que tenha pelo menos uma raiz, que não pode ser determinada usando o Método da Bisseção.

2. Dê um exemplo de função $f(x)$, que tenha pelo menos uma raiz, onde o Método de Newton-Raphson não converge.

3. A equação $x^2 - 7x + 12 = 0$ tem 3 e 4 como raízes. Considere a função de iteração dada por $\varphi(x) = x^2 - 6x + 12$. Determine o intervalo $(a,\ b)$, onde para qualquer que seja x_0 escolhido a sequência $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge para a raiz $x = 3$. Mostre que a convergência é quadrática.

4. Para determinar a raiz quadrada de um número $c \geq 0$, basta resolver a equação $x^2 - c = 0$. É possível determinar sua raiz quadrada usando a função de iteração $\varphi(x) = c/x$. Justifique a resposta.

5. As funções de iterações $\varphi_1(x) = x^2/2 - 2x + 4$ e $\varphi_2(x) = x^2/2 - 2.5x + 5$, geram sequências convergentes para a raiz $\overline{x} = 2$, para qualquer aproximação inicial $x_0 \in (1.5,\ 3)$. Qual das duas funções geram sequências mais rapidamente convergente para esta raiz. Justifique a resposta.

6. Determine um intervalo $(a,\ b)$ e uma função de iteração $\varphi(x)$ associada, de tal forma que $\forall x_0 \in (a,\ b)$ a função de iteração gere uma sequência convergente para a(s) raiz(es) de cada uma das funções abaixo, usando o método iterativo linear (MIL) com tolerância $\epsilon \leq 1.10^{-3}$.

   (a) $f_1(x) = \sqrt{x} - e^{-x}$

   (b) $f_2(x) = \ln(x) - x + 2$

   (c) $f_3(x) = e^{x/2} - x^3$

   (d) $f_4(x) = \text{sen}(x) - x^2$

   (e) $f_5(x) = x/4 - \cos(x)$

7. Determine a(s) raiz(es) da função $f_1(x)$, usando o método da Bisseção, Método da Falsa posição e da Falsa posição modificada com tolerância $\varepsilon = 1.10^{-3}$. Quantas iterações foram necessárias para cada um dos métodos.

8. Determine as raízes do exercício (6), usando o Método de Newton-Raphson.

9. Determine as raízes do exercício (6), usando o Método das Secantes.

10. Determine os pontos extremos do exercício (6), usando o Método de Newton-Raphson.

11. Determine o ponto de intersecção entre as funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$, $f_2(x)$ e $f_3(x)$ e entre $f_1(x)$, $f_2(x)$ e $f_3(x)$.

12. O Teorema do Valor Médio, diz que para função diferenciável $f(x)$, existe um número $0 < \alpha < 1$, tal que :

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a + \alpha(x - a))$$

Considere $a = 0$; $\alpha = 1/2$ e $f(x) = \arctan(x)$. Determine o $x > 0$ que satisfaz a igualdade acima.

13. Sabe-se que se $x = \xi$ é uma raiz dupla de $f(x)$ então o Método de Newton-Raphson não converge quadraticamente. Mostre que se $f'(\xi) = 0$, mas todas as outras condições de convergência estão satisfeitas, então a iteração:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n)}$$

converge quadraticamente.

14. Seja $x = \xi$ uma raiz de $f(x)$, tal que $f'(\xi) \neq 0$ e $f"(\xi) = 0$. Mostre que neste caso o Método de Newton-Raphson tem convergência cúbica.

15. Encontre todas as raízes reais do polinômio abaixo pelo método de Newton-Raphson.

$$p(x) = x^4 - 2x^3 + 4x - 1.6$$

16. Uma pessoa tomou um empréstimo de A reais, que acrescenta os juros no total antes de computar o pagamento mensal. Assim, se a taxa mensal de juros, em porcentagem, é q e o empréstimo é pelo prazo de n meses, a quantia total que o tomador concorda em pagar é:

$$C = A + A.n.\frac{q}{100}.$$

Isto é dividido por n para dar o total de cada pagamento P, ou seja

$$P = \frac{C}{n} = A\Big(\frac{1}{n} + \frac{q}{100}\Big)$$

Isto é perfeitamente legal e muito usado em lojas de departamento .(É chamado o empréstimo com acréscimo). Mas a verdadeira taxa de juros que o tomador está pagando é alguma coisa além de $q\%$, porque ele não conserva o total do empréstimo por todos os n meses: Ele está pagando-o de volta com o decorrer do tempo. A verdadeira taxa de juros pode ser encontrada pela determinação de uma raiz x da equação:

$$F(x) = (Ax - P)(1 + x)^n + P = 0$$

Isto fornece a taxa de juros por período de pagamento, que pode ser convertida em taxa anual multiplicando-se a mesma por 12. Seja $A = R\$1000$, $n = 24$ e $q = 5\%$. Determine a verdadeira taxa de juros.