Exercícios de Cálculo Numérico - Sistemas Lineares

1. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ -x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

   (a) Mostre que este sistema não satisfaz o critério de linhas,

   (b) Mostre que este sistema não satisfaz o critério de Sassenfeld,

   (c) O que se pode afirmar sobre a convergência dos métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel, quando aplicados a este sistema?

   (d) Mostre que o sistema obtido permutando-se as duas primeiras equações satisfaz o critério de Sassenfeld,

   (e) Usando o método de Gauss-Seidel, determine a solução aproximada do sistema, com a permutação sugerida no item anterior e erro

$$\|x^{k+1} - x^k\|_\infty = \max_{i=1,\cdots,4} |x_i^{k+1} - x_i^k| \leq \epsilon = 1.10^{-3}$$

2. Considere o sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_2 - 2x_3 = 3 \\ 10x_1 + x_2 + x_4 = -8 \\ x_1 - x_3 + 3x_4 = 8 \end{cases}$$

   (a) Resolva o sistema pelo método de Eliminação de Gauss com pivoteamento.

   (b) Utilizando o resultado do item anterior, escreva o sistema linear $LUx = Pb$, equivalente ao sistema linear dado, onde P é uma matriz de permutação. Determine a matriz inversa.

   (c) Podemos determinar a solução aproximada do sistema , usando o Método de Gauss - Seidel para qualquer aproximação inicial ? Porquê ?

3. Considere o sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} 0.78000\, x_1 - 0.56300\, x_2 = 0.21700 \\ 0.91300\, x_1 - 0.65900\, x_2 = 0.25400 \end{cases}$$

   (a) Calcule os vetores $E_1 = A\overline{x}_1 - b$ e $E_2 = A\overline{x}_2 - b$, onde $\overline{x}_1^t = (0.34100\ ;\ -0.08700)$ e $\overline{x}_2^t = (0.99900\ ;\ -1.00100)$. Considerando os resultados obtidos para E_1 e E_2, qual das duas aproximações $\{\overline{x}_1; \overline{x}_2\}$ é a melhor. Justifique a resposta.

   (b) Resolva o sistema dado, usando o Método de Eliminação de Gauss com pivoteamento parcial, trabalhando com 5 casas decimais.

(c) Sabendo que a solução exata do sistema é $x = \{1\ ; -1\}$ e observando os ítens anteriores, pergunta-se o sistema é bem condicionado? Justifique sua resposta.

4. Prove que toda matriz diagonal dominante satisfaz o critério de Sassenfeld, mas a recíproca é falsa.

5. Considere o sistema linear abaixo:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} kx_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ kx_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}\right.$$

(a) Determine para que valores de k se tem garantia de que o método de Gauss-Seidel e Gauss-Jacobi, geram uma sequência convergente para qualquer aproximação inicial.

(b) Escolha o menor valor inteiro positivo de k e determine uma solução aproximada do sistema, usando os métodos acima, com erro $\|x^{k+1} - x^k\|_\infty = \max\limits_{i=1,\cdots,4} |x_i^{k+1} - x_i^k| \leq \epsilon = 1.10^{-3}$.

(c) Qual dos dois métodos convergem mais rápido?

6. Seja o sistema linear:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & & & & & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & & & = & b_2 \\ & & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & a_{34}x_4 & = & b_3 \\ & & & & a_{43}x_3 & + & a_{44}x_4 & = & b_4 \end{array}\right.$$

(a) Considerando a forma tridiagonal da matriz dos ceficientes, desenvolva um algoritmo ótimo, para resolver o sistema pelo Método de Eliminação de Gauss sem pivoteamento.

Considere os valores numéricos: $a_{11} = a_{33} = 2$, $a_{12} = a_{21} = a_{34} = a_{43} = -1$, $a_{23} = a_{32} = a_{44} = 1$, $a_{22} = 3$, $b_1 = -5$, $b_2 = -7$, $b_3 = -6$, $b_4 = 1$.

(b) Determine a solução pelo algoritmo do item a.

(c) Determine o número total de operações de multiplicação e Adição.

(d) Faça uma análise da convergência dos métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel, para o sistema acima.