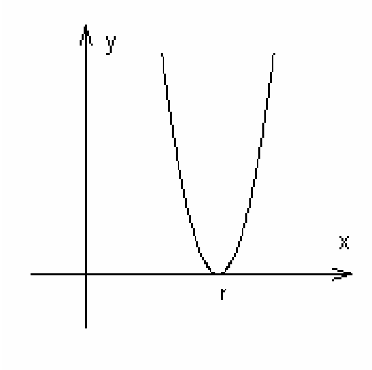
Gabarito – Zero de Função

Exercício 1:

Um exemplo é $f(x) = (x - r)^2, r \in R$

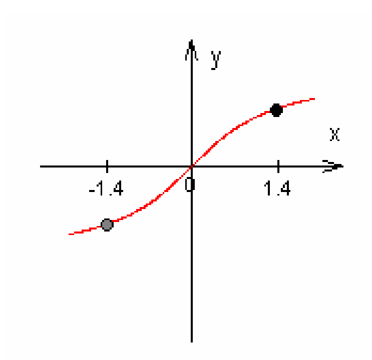


A raiz $x = r$ *não pode ser determinada pelo Método da Bisseção porque* $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathrm{R}$.
Temos também que $f'(x)$ *muda de sinal quando x se aproxima de r.*

Exercício 2:

Seja r a raiz de f(x). O método de Newton-Raphson pode não convergir se $|x_0 - r|$ *é "grande".*

Um exemplo: $f(x) = arctg(x)$.



Para algum $x_c \in [1.39, 1.40]$*, se* $|x_0| > x_c$*, a seqüência* $\{x_n\}$ *diverge,* $|x_n - r|$ *cresce a cada iteração.*

Duas observações-extras:

1. *Se* $x_0 = x_c$*, então o método produz o ciclo* $x_1 = -x_c, x_2 = x_c, x_3 = -x_{c,...}$
2. *Se* $|x_0| < x_c$*, a seqüência* $\{x_n\}$ *converge para r = 0.*

Exercício 3:

$I = (2, 4)$.

$$(x) = x^2 - 6x + 12$$
$$f(x) = x^2 - 7x + 12$$

Supondo $x_0 = 2.1$*, temos:*

$$x_1 = (2.1)^2 - 6(2.1) + 12 = 3.81$$
$$x_2 = 3.6561$$

$x_3 = 3.43046721$
$x_4 = 3.185302019$
$x_5 = 3.034336837$
$x_6 = 3.001179018$
$x_7 = 3.000001389$
$x_8 = 2.999999997$
$x_9 = 3.000000002$
$x_{10} = 2.999999998$
$x_{11} = 3$
$x_{12} = 3$
.
.
.
$x_k = 3, k \to \infty$

Obs.: Se eu escolher $x_0 = 2,\ x_k = 4$, *quando* $k \to \infty$.
Se eu escolher $x_0 = 4,\ x_k = 4$, *quando* $k \to \infty$.
Mas, se eu escolher $2 < x_0 < 4,\ x_k = 3$, *quando* $k \to \infty$.

Para mostrar que a convergência é quadrática, temos que aplicar:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - r|}{|x_n - r|^2} = C, \quad 0 \le C \le 1, \quad \text{quando } n \to \infty$$

Então:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - 3|}{|x_n - 3|^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\ ((\ _n) - 3|}{|x_n - 3|^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x_n{}^2 - 6x_n + 12 - 3|}{|x_n - 3|^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x_n{}^2 - 6x_n + 9|}{|x_n - 3|^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x_n - 3|^2}{|x_n - 3|^2} = 1$$

Portanto, a convergência é quadrática.

__Exercício 4:__

Condição suficiente para convergência: $|\varphi'(r)| < 1 \Rightarrow -1 < \varphi'(r) < 1$

Aqui, sabemos que as raízes são: $r_1 = \sqrt{c}$ e $r_2 = -\sqrt{c}$

Então, $|\varphi'(x)| = \dfrac{c}{|x|^2} < 1 \Rightarrow |x|^2 > c \Rightarrow |x| > \sqrt{c} \Rightarrow x < -\sqrt{c}$ ou $x > \sqrt{c}$

Como r_1 *e* r_2 *não pertencem ao intervalo* $I = (-\infty, -\sqrt{c}) \cup (\sqrt{c}, +\infty)$, *logo não é possível determinar a raiz quadrada de um número* $c \ge 0$ *usando a função de iteração* $\varphi(x) = \dfrac{c}{x}$.

__Exercício 5:__

$$\varphi_1(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 4 \Rightarrow \varphi_1'(x) = x - 2$$

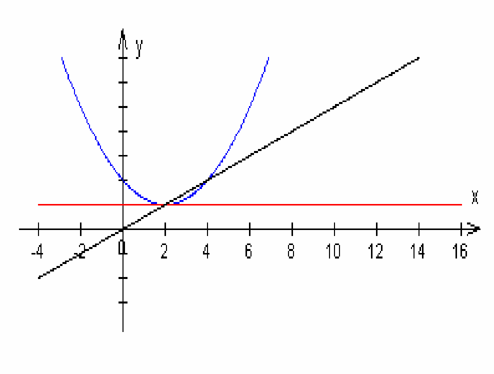
Nas proximidades da raiz ($r \approx 2$), *temos que* $|\varphi_1'(2)| = 0$

$\varphi_2(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2.5x + 5 \Rightarrow \varphi_2'(x) = x - 2.5$

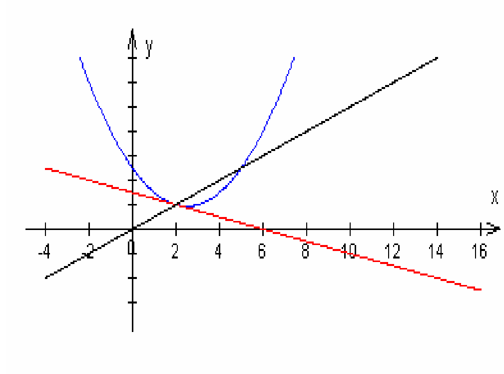
Nas proximidades da raiz $(r \approx 2)$ *temos que* $|\varphi_2'(2)| = 0.5$

Como $|\varphi_1'(2)| < |\varphi_2'(2)|$, *então* $\varphi_1(x)$ *convergirá mais rapidamente para a raiz.*

Veja o comportamento de ambas as funções:



Para $\varphi_1(x)$



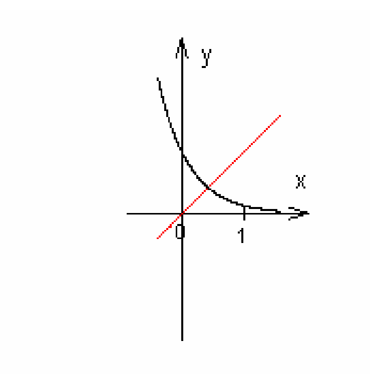
Para $\varphi_2(x)$

<u>Exercício 6:</u>

(a) $f_1(x) = \sqrt{x} - e^{-x}$

$\sqrt{x} - e^{-x} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = e^{-x} \Rightarrow x = e^{-2x} \Rightarrow \varphi_1(x) = e^{-2x}$

Graficamente, percebemos que $r \in (0,1)$.



Um bom intervalo para encontrar a raiz é $I = (0.42,\ 0.44)$.

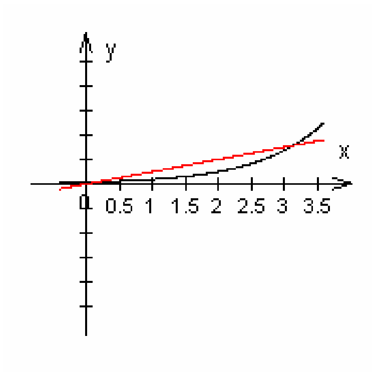
Usando $x_0 = 0.43$, *temos:*

$x_1 = 0.4231620082 \Rightarrow \varepsilon = 0.006837\ldots > 0.001$
$x_2 = 0.42898893 \Rightarrow \varepsilon = 0.005826\ldots > 0.001$
$x_3 = 0.4240186641 \Rightarrow \varepsilon = 0.0049702\ldots > 0.001$
$x_4 = 0.42825465 \Rightarrow \varepsilon = 0.004236009\ldots > 0.001$
$x_5 = 0.424641795 \Rightarrow \varepsilon = 0.0036128\ldots > 0.001$
$x_6 = 0.427721246 \Rightarrow \varepsilon = 0.00307945\ldots > 0.001$
$x_7 = 0.425095048 \Rightarrow \varepsilon = 0.00262619\ldots > 0.001$
$x_8 = 0.427333689 \Rightarrow \varepsilon = 0.00223864\ldots > 0.001$

$x_9 = 0.425424673 \Rightarrow \varepsilon = 0.001909015... > 0.001$
$x_{10} = 0.427052062 \Rightarrow \varepsilon = 0.001627389... > 0.001$
$x_{11} = 0.425664362 \Rightarrow \varepsilon = 0.001387699... > 0.001$
$x_{12} = 0.426847392 \Rightarrow \varepsilon = 0.0011830306... > 0.001$
$x_{13} = 0.425838639 \Rightarrow \varepsilon = 0.00100875208... > 0.001$
$x_{14} = 0.426698639 \Rightarrow \varepsilon = 0.000860000166 < 0.001 \Rightarrow$ *aqui está a aproximação!*

(b) $f_2(x) = ln(x) - x + 2$

$ln(x) - x + 2 = 0 \Rightarrow x - 2 = ln(x) \Rightarrow x = e^{x-2} \Rightarrow \quad _2(x) = e^{x-2}$



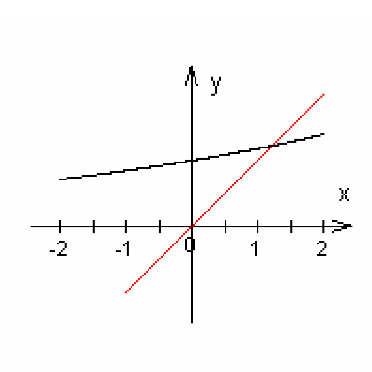
Temos duas raízes : $r_1 \in (0, 0.5)$ *e* $r_2 \in (3, 3.5)$

usando $x_0 = 0.43$*, temos :*

$x_1 = 0.208045182 \Rightarrow \varepsilon = 0.221954818 > 0.001$
$x_2 = 0.166634111 \Rightarrow \varepsilon = 0.041411071 > 0.001$
$x_3 = 0.159874541 \Rightarrow \varepsilon = 0.00675957 > 0.001$
$x_4 = 0.158797502 \Rightarrow \varepsilon = 0.001077039 > 0.001$
$x_5 = 0.158626563 \Rightarrow \varepsilon = 0.000170939 < 0.001 \Rightarrow$ *aqui está a aproximação!*

(c) $f_3(x) = e^{x/2} - x^3$

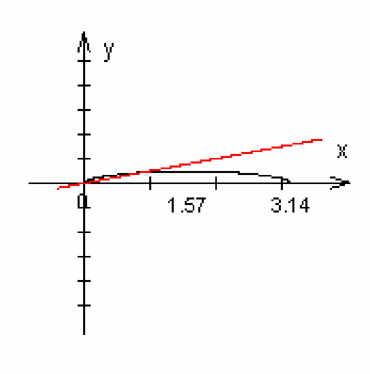
$e^{x/2} - x^3 = 0 \Rightarrow e^{x/2} = x^3 \Rightarrow \left(e^{x/2}\right)^{1/3} = \left(x^3\right)^{1/3} \Rightarrow e^{x/6} = x \Rightarrow \quad _3(x) = e^{x/6}$



Então, pelo gráfico, $r \in (1, 2)$.

$x_0 = 1.3$ *(uma aproximação inicial arbitrária)*
$x_1 = 1.241930056 \Rightarrow \varepsilon = 0.058069944 > 0.001$
$x_2 = 1.229968234 \Rightarrow \varepsilon = 0.011961822 > 0.001$
$x_3 = 1.227518566 \Rightarrow \varepsilon = 0.0024496... > 0.001$
$x_4 = 1.2270175 \Rightarrow \varepsilon = 0.00050106... < 0.001 \Rightarrow$ *aqui está a aproximação!*

(d) $f_4(x) = sen(x) - x^2$



$_{41}(x) = \sqrt{sen(x)}$

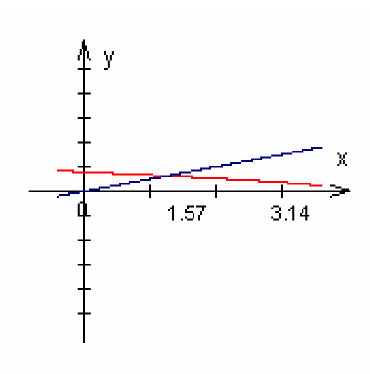
$r_1 \in (0, \ \pi/2)$

$x_0 = 1.5$
$x_1 = 0.998746707$
$x_2 = 0.916947745$
$x_3 = 0.89092581$
$x_4 = 0.881846999$
$x_5 = 0.878586581$
$x_6 = 0.877403868 \Rightarrow \varepsilon = 0.001182713 > 0.001$
$x_7 = 0.876973292 \Rightarrow \varepsilon = 0.000430576 < 0.001 \Rightarrow$ *uma das raízes*

A outra raiz terá de ser encontrada em $_{42}(x) = -\sqrt{sen(x)}$

(e) $f_5(x) = \frac{x}{4} - \cos(x)$

$$\frac{x}{4} - \cos(x) = 0 \Rightarrow \cos(x) = \frac{x}{4} \Rightarrow x = \arccos\left(\frac{x}{4}\right) \Rightarrow \ _5(x) = \arccos\left(\frac{x}{4}\right)$$

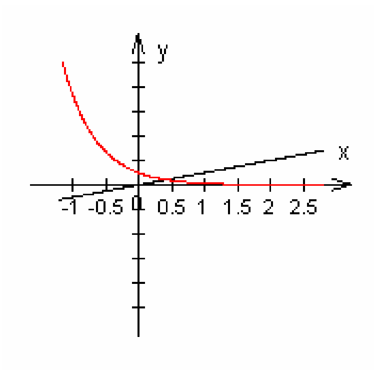


Usando $x_0 = 1.5$ temos :

$x_1 = 1.186399552 \Rightarrow \varepsilon = 0.313600448 > 0.001$
$x_2 = 1.269665971 \Rightarrow \varepsilon = 0.083266419 > 0.001$
$x_3 = 1.247792482 \Rightarrow \varepsilon = 0.021873488 > 0.001$
$x_4 = 1.253553543 \Rightarrow \varepsilon = 0.00576106147 > 0.001$
$x_5 = 1.252037255 \Rightarrow \varepsilon = 0.00151628804 > 0.001$
$x_6 = 1.252436409 \Rightarrow \varepsilon = 0.00039915439 < 0.001 \Rightarrow$ uma aproximação para a raiz

Exercício 7:

(i) Método da Bisseção:



$f_1(x) = \sqrt{x} - e^{-x}$

$r \in (0, 1);$

$x_0 = \dfrac{0+1}{2} = 0.5 \Rightarrow f_1(0.5) = 0.100576121 > 0 \Rightarrow r \in (0, 0.5)$

$x_1 = \dfrac{0+0.5}{2} = 0.25 \Rightarrow f_1(0.25) = -0.278800783 < 0 \Rightarrow r \in (0.25, 0.5)$

$x_2 = \dfrac{0.25+0.5}{2} = 0.375 \Rightarrow f_1(0.375) = -0.074916843 < 0 \Rightarrow r \in (0.375, 0.5)$

$x_3 = \dfrac{0.375+0.5}{2} = 0.4375 \Rightarrow f_1(0.4375) = -0.88739247 < 0 \Rightarrow r \in (0.4375, 0.5)$

$x_4 = \dfrac{0.4375+0.5}{2} = 0.46875 \Rightarrow f_1(0.46875) = 0.058869187 > 0 \Rightarrow r \in (0.4375, 0.46875)$

$x_5 = \dfrac{0.4375+0.46875}{2} = 0.453125 \Rightarrow f_1(0.453125) = 0.037506927 > 0 \Rightarrow r \in (0.4375, 0.453125)$

$x_6 = \dfrac{0.4375+0.453125}{2} = 0.4453125 \Rightarrow f_1(0.4453125) = 0.026693341 > 0$
$\Rightarrow r \in (0.4375, 0.4453125)$

$x_7 = \dfrac{0.4375+0.4453125}{2} = 0.44140625 \Rightarrow f_1(0.44140625) = 0.021252731 > 0$
$\Rightarrow r \in (0.4375, 0.44140625)$

$$x_8 = \frac{0.4375 + 0.44140625}{2} = 0.43945125 \quad \Rightarrow \; f_1(0.43945125) = 0.01852126 > 0$$
$$\Rightarrow r \in (0.4375, 0.43945125)$$

$$x_9 = \frac{0.4375 + 0.43945125}{2} = 0.438475625 \quad \Rightarrow \; \varepsilon = |0.43945125 - 0.438475625| = 0.000975625 < 0.001$$

Portanto, a raiz aproximada é $x_9 = 0.438475625$

(ii) Método da Falsa Posição:

Aqui, usamos média ponderada entre a e b com pesos $|f(b)|$ *e* $|f(a)|$*, respectivamente.*

$$x = \frac{a|f(b)| + b|f(a)|}{|f(b)| + |f(a)|} = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$ *, visto que f(a) e f(b) têm sinais opostos.*

$$r \in (0,1) \Rightarrow \; f_1(0) = -1 < 0 \;\; ; \;\; f_1(1) = 0.632120558 > 0$$

$$x_0 = \frac{0(0.632120558) - 1(-1)}{0.632120558 - (-1)} = 0.612699837 \Rightarrow f_1(0.612699837) = 0.240865564 > 0$$
$$\Rightarrow r \in (0, 0.612699837)$$

$$x_1 = \frac{-0.612699837(-1)}{1.612699837} = 0.379921807 \Rightarrow f_1(0.379921807) = -0.067536909 < 0 \Rightarrow$$
$$r \in (0.379921807, 0.612699837)$$

$$x_2 = \frac{0.379921807(0.240865564) - 0.612699837(-0.067536909)}{0.240865564 - (-0.067536909)} = 0.430897755$$
$$\Rightarrow f_1(0.430897755) = 0.00650268784 > 0 \Rightarrow r \in (0.379921807, 0.430897755)$$

$$x_3 = \frac{0.379921807(0.006502668784) - 0.430897755(-0.067536909)}{0.006502668784 + 0.067536909} = 0.426420694$$
$$\Rightarrow f_1(0.426420694) = 0.000167316215 > 0 \Rightarrow r \in (0.379921807, 0.426420694)$$

$x_4 = 0.426305782 \Rightarrow \varepsilon = 0.000114911851 < 0.001 \Rightarrow$ *aqui está uma aproximação!*

<u>Exercício 8:</u> Usar Método de Newton-Raphson para as letras (a), (b), (c), (d), (e) do Ex. 6.

<u>Exercício 9:</u> Usar Método das Secantes para as letras (a), (b), (c), (d), (e) do Ex. 6.

<u>Exercício 10:</u> Pontos extremos são pontos onde f'(x) = 0. Resolver essa equação por Newton-Raphson para as letras (a), (b), (c), (d), (e) do Ex. 6.

<u>Exercício 11:</u>

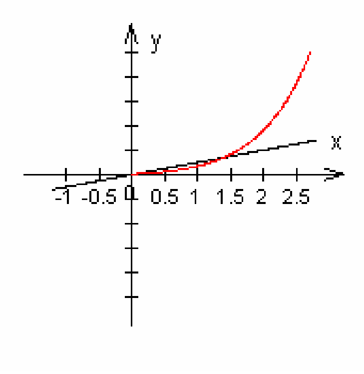
(i) $f_1(x) = f_2(x)$

$$\sqrt{x} - e^{-x} = ln(x) - x + 2$$

isolando x no membro esquerdo da equação, obtemos :

$$ln(x) = \sqrt{x} - e^{-x} + x - 2 \Rightarrow x = \underbrace{e^{\sqrt{x} - e^{-x} + x - 2}}_{w(x)}$$

Pelo gráfico abaixo, temos duas raízes : $r_1 \in (0, 1)$ *e* $r_2 \in (1, 2)$.



Vamos resolver pelo Método de Newton-Raphson usando 4 casas decimais:

Aqui, já uso as equações :

$$h(x) = \sqrt{x} - e^{-x} - \ln(x) + x - 2$$
$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + e^{-x} - \frac{1}{x} + 1$$

Para aplicar a fórmula de Newton - Raphson :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)}$$

Usando $x_0 = 0.07$ *temos :*

$x_1 = 0.0759$
$x_2 = 0.0762$
$x_3 = 0.0762 \Rightarrow$ *Aqui, está uma aproximação!*
$f_1(0.0762) = f_2(0.0762) = -0.6506$

Portanto, um dos pontos de interseção é $P_1 = (0.0762, -0.6506)$

Agora, para $r_2 \in (1, 2)$.

Usando $x_0 = 1.4$, *temos :*

$x_1 = 1.3998$
$x_2 = 1.3998$

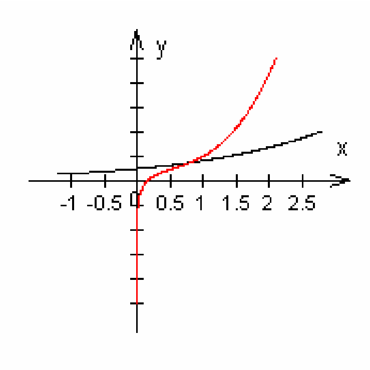
$f_1(1.3998) = f_2(1.3998) = 0.9365$

Então, outro ponto de interseção é $P_2 = (1.3998, 0.9365)$

(ii) $f_2(x) = f_3(x)$

$$ln(x) - x + 2 = e^{x/2} - x^3 \Rightarrow \underbrace{e^{x/2}}_{h_1(x)} = \underbrace{ln(x) - x + 2 + x^3}_{h_2(x)}$$

Pelo gráfico abaixo, temos apenas uma raiz $r \in (0,1)$:



Vamos resolver pelo Método de Newton-Raphson usando 4 casas decimais:

Obs. :

$$f(x) = e^{x/2} - x^3 - ln(x) + x - 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}e^{x/2} - 3x^2 - \frac{1}{x} + 1$$

Usando $x_0 = 0.7$, *temos* :

$x_1 = 0.8116$
$x_2 = 0.8022$
$x_3 = 0.8021$
$x_4 = 0.8021$

$f_2(0.8021) = f_3(0.8021) = 0.9774$

O ponto de interseção é $(0.8021, 0.9774)$

$f_1 \cap f_2$:
$P_1 = (0.0762, -0.6506)$
$P_2 = (1.3998, 0.9365)$

$f_3(0.0762) = 1.0384 \neq -0.6506$
$f_3(1.3998) = -0.7293 \neq 0.9365$

$f_2 \cap f_3 \Rightarrow P = (0.8021, 0.9774)$
$f_1(0.8021) = 0.4472 \neq 0.9774$

Portanto, não existe ponto de interseção entre f_1, f_2 *e* f_3 *simultaneamente.*

Exercício 12:

Substituindo os valores dados na equação, temos :

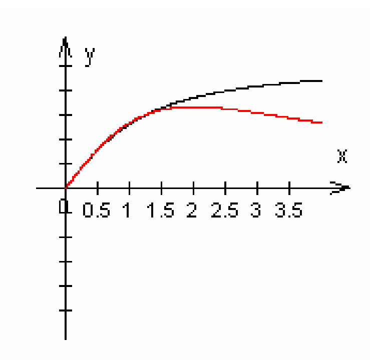
$$arctg(x) = \underbrace{arctg(0)}_{0} + (x - 0)\ f'\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$arctg(x) = x\ f'\left(\frac{x}{2}\right)$$

Sabendo que $\left(arctg(x)\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ *, temos :*

$$arctg(x) = x\left(\frac{1}{1+\left(x^2/4\right)}\right) \Rightarrow arctg(x) = x\left(\frac{1}{\left(4+x^2\right)/4}\right) \Rightarrow \underbrace{arctg(x)}_{h_1(x)} = \underbrace{\frac{4x}{4+x^2}}_{h_2(x)}$$

Obs. : O exercício pede $x > 0$*, então* $r \in (1, 2)$.



Vamos resolver por Método de Newton-Raphson com duas casas decimais:

$$f(x) = arctg(x) - \frac{4x}{x^2+4}$$

$$f'(x) = \frac{5x^4 - 4x^2}{x^8 + 9x^4 + 24x^2 + 16}$$

Usando $x_0 = 1.4$*, temos :*

$x_1 = 1.29$

$x_2 = 1.29$

Então, $x \approx 1.29$

Exercício 13:

Definição: uma raiz ε *da função* $f(x)$ *é dita de multiplicidade* p *se* $0 \neq |g(\varepsilon)| \leq M$ *e* $g(x) = (x - \varepsilon)^{-p} f(x)$.

Note que nessas condições: $f(\varepsilon) = f'(\varepsilon) = f''(\varepsilon) = \ldots = f^{p-1}(\varepsilon) = 0$.

Vamos mostrar agora um algoritmo, que tem convergência quadrática, mesmo quando as raízes têm multiplicidade $p > 1$.

Considere o desenvolvimento de Taylor de f(x) na vizinhança da raiz ε *. Então:*

$$f(x) = f(\varepsilon) + (x-\varepsilon)f'(\varepsilon) + \frac{(x-\varepsilon)^2}{2!}f''(\varepsilon) + \ldots + \frac{(x-\varepsilon)^p}{p!}f^p(\varepsilon) = \frac{(x-\varepsilon)^p}{p!}f^p(a), \text{ onde } a \in (x,\varepsilon)$$

pois pela hipótese ε *é uma raiz de multiplicidade p. Derivando f(x), obtemos que:*

$$f'(x) = p\frac{(x-\varepsilon)^{p-1}}{p!}f^p(a) = \frac{(x-\varepsilon)^{p-1}}{(p-1)!}f^p(a)$$

Definimos h(x) = $\dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

Então,

$$\lim_{x\to\varepsilon}\frac{h(x)}{x-\varepsilon} = \lim_{x\to\varepsilon}\frac{f(x)}{f'(x)(x-\varepsilon)} = \lim_{x\to\varepsilon}\frac{(x-\varepsilon)^p f^p(aa}{\dfrac{p!}{(p-1)!}(x-\varepsilon)^{p-1}f^p(aa)(-\varepsilon)} = \frac{1}{p} \neq 0$$

Da definição de multiplicidade conclui-se que h(x) tem uma raiz x = ε *simples ou de multiplicidade 1, pois*

$$\lim_{x\to\varepsilon} h(x) = \frac{1}{p}\lim_{x\to\varepsilon}(x-\varepsilon) = 0$$

Dessa forma pode ser empregado qualquer método numérico para obtenção da raiz de h(x), mantendo a ordem de convergência. Em particular para o Método de Newton-Raphson, temos:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)}, \qquad n = 0,1,\ldots \tag{1}$$

Por definição,

$$h(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \quad \Rightarrow \quad h'(x) = 1 - \frac{f''(x)f(x)}{[f'(x)]^2} = 1 - \frac{f''(x)}{f'(x)}h(x).$$

Assim temos o seguinte algoritmo para determinar a raiz simples da função h(x):

$$\begin{cases} h(x_n) = \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ h'(x_n) = 1 - \dfrac{f''(x_n)}{f'(x_n)}h(x_n) \quad , \quad n = 0,1,\ldots \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{h(x_n)}{h'(x_n)} \end{cases} \tag{2}$$

Definição (Ordem de Convergência): Seja $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, *n = 0, 1, 2,... uma seqüência convergente com* $\lim_{n\to\infty} x_n = \varepsilon$ *e seja V uma vizinhança da raiz* ε *tal que* $x_n \in V$ *para todo n. Então a iteração converge com ordem p > 1 em V, se* $\varphi \in C^p(V)$ *e*

$$\varphi^{(j)}(\varepsilon) = 0 \ , \ \forall j = 1,2,\ldots,(p-1) \ \text{ e } \ \varphi^{(p)}(\varepsilon) \neq 0$$

Proposição: Considere a seguinte modificação do Método de Newton-Raphson

$$x_{n+1} = x_n - p\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0,1,\ldots$$

Seja p a multiplicidade da raiz ε de f(x). Prove que o método iterativo acima tem convergência quadrática.

Prova: Usando a definição acima, basta mostrar que $\varphi''(\varepsilon) \neq 0$, onde

$$\varphi(x) = x - p\frac{f(x)}{f'(x)}$$

<u>Exercício 14:</u>

Seja x = ε uma raiz de f(x), tal que $f'(\varepsilon) \neq 0$ e $f''(\varepsilon) = 0$. Então do MNR tem-se que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Subtraindo ε em ambos os lados da igualdade e definindo o erro $e_n = x_n - \varepsilon$ tem-se

$$e_{n+1} = e_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1}$$

Fazendo o desenvolvimento de Taylor de x na vizinhança de x_n temos:

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n) + \frac{(x - x_n)^2}{2!}f''(x_n) + \frac{(x - x_n)^3}{3!}f'''(a_n) \quad , \quad \text{onde } a_n \in (x, x_n). \tag{2}$$

Tomando x = ε em (2), obtemos

$$0 = f(\varepsilon) = f(x_n) - e_n f'(x_n) + \frac{(e_n)^2}{2!}f''(x_n) - \frac{(e_n)^3}{3!}f'''(a_n) \tag{3}$$

Dividindo a igualdade por $f'(x_n) \neq 0$, obtemos

$$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = -e_n + \frac{(e_n)^2}{2!}\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{(e_n)^3}{3!}\frac{f'''(a_n)}{f'(x_n)} \tag{4}$$

Substituindo em (1), obtemos que

$$e_{n+1} = \frac{(e_n)^2}{2!}\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{(e_n)^3}{3!}\frac{f'''(a_n)}{f'(x_n)} \tag{5}$$

Fazendo $n \to \infty$ tem-se que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)} = 0$. Logo,

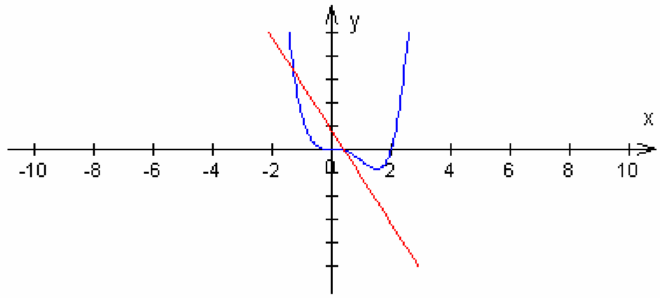
$$\lim_{n\to\infty}\frac{e_{n+1}}{(e_n)^3} = -\lim_{n\to\infty}\frac{f'''(a_n)}{3!\,f'(x_n)} = -\frac{f'''(\varepsilon)}{3!\,f'(\varepsilon)} = C \neq 0$$

Portanto a ordem de convergência é cúbica nesse caso.

Exercício 15:

$p(x) = x^4 - 2x^3 + 4x - 1.6$

Gráfico de $x^4 - 2x^3 = 1.6 - 4x$



Pela tabela abaixo:

x	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4
p(x)	22,4	-2,6	-1,6	1,4	6,4	37,4	142,4

Temos duas raízes duplas: $r_1 \in (-2,-1)$ *e* $r_2 \in (0,1)$

Vamos então aplicar o algoritmo de Briot-Ruffini com Newton-Raphson:

Para $r_1 \in (-2,-1)$*, com uma aproximação inicial de* $x_0 = 1{,}50$ *e usando duas casas decimais, temos:*

	1	-2	0	4	-1,6
-1,50	1	-3,50	5,25	-3,88	4,22 = p(1,50)
-1,50	1	-5,00	12,75	-23,00 = p'(-1,50)	

$$x_1 = x_0 - \frac{p(x_0)}{p'(x_0)} = -1{,}50 + \frac{4{,}22}{23{,}00} \approx -1{,}32$$

	1	-2	0	4	-1,6
-1,32	1	-3,32	4,38	-1,78	0,75 = p(-1,32)
-1,32	1	-4,64	10,50	-15,64 = p'(-1,32)	

$$x_2 = x_1 - \frac{p(x_1)}{p'(x_1)} = -1{,}32 + \frac{0{,}75}{15{,}64} \approx -1{,}27$$

	1	-2	0	4	-1,6
-1,27	1	-3,27	4,15	-1,27	0,01= p(-1,27)≈0
-1,27	1	-4,54	9,92	-13,87 = p'(-1,27)	

Então, $r_1 \approx 1{,}27$

Para $r_2 \in (0,1)$*, com uma aproximação inicial de* $x_0 = 0{,}50$*, vamos usar duas casas decimais. Como já achamos uma das raízes (*$r_1 \approx 1{,}27$*) então vamos usar apenas os coeficientes do último q(x). Assim, temos:*

	1	-3,27	4,15	-1,27
0,50	1	-2,77	2,75	0,11 = p(0,50)
0,50	1	-2,27	1,62 = p'(0,50)	

$$x_1 = x_0 - \frac{p(x_0)}{p'(x_0)} = 0{,}50 - \frac{0{,}11}{1{,}62} \approx 0{,}43$$

	1	-3,27	4,15	-1,27
0,43	1	-2,84	2,93	-0,01 = p(0,43)
0,43	1	-2,41	1,89 = p'(0,43)	

$$x_2 = x_1 - \frac{p(x_1)}{p'(x_1)} = 0{,}43 + \frac{0{,}01}{1{,}89} \approx 0{,}44$$

	1	-3,27	4,15	-1,27
0,44	1	-2,83	2,90	0,01 = p(0,44) ≈ 0
0,44	1	-2,39	1,85 = p'(0,44)	

Então, $r_2 \approx 0{,}44$

<u>Exercício 16:</u>

Dados do problema:

A = 1000 reais
N = 24 meses = 2 anos
q = 5% a.m = 60% a.a.

Substituindo esses dados na segunda equação do enunciado, que dá o valor de P, temos:

$$P = 1000\left(\frac{1}{2} + \frac{60}{100}\right) = 1000(0{,}5 + 0{,}6) = 1000(1{,}1) = 1100 \text{ reais}$$

Agora, substituindo os valores de A, P e n na equação de F(x), temos:

$$F(x) = (1000x - 1100)(1+x)^2 + 1100 = 0 \Rightarrow F(x) = 10x^3 + 9x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x\left(10x^2 + 9x - 12\right) = 0$$

Repare que x = 0 é uma das raízes da equação. Mas como se trata de taxa de juros, essa raiz é descartada.

Vamos tentar resolver com o Algoritmo de Briot-Ruffini associado ao Método de Newton-Raphson.

Pela tabela abaixo:

x	0	1	2	...
F(x)	-12	7	46	...

Vemos mudança do sinal de F(x) para $x \in (0,1)$.

Com uma aproximação inicial de x_0 = 0,50 temos:

	10	9	-12
0,50	10	14	-5 = p(0,50)
0,50	10	19 = p' (0,50)	

$$x_1 = x_0 - \frac{p(x_0)}{p'(x_0)} = 0{,}50 + \frac{5}{19} \approx 0{,}76$$

	10	9	-12
0,76	10	16,60	0,62 = p(0,76)
0,76	10	24,20 = p' (0,76)	

$$x_2 = x_1 - \frac{p(x_1)}{p'(x_1)} = 0{,}76 - \frac{0{,}62}{24{,}20} \approx 0{,}73$$

	10	9	-12
0,73	10	16,30	-0,10 = p(0,73)
0,73	10	23,60 = p' (0,73)	

$$x_3 = 0{,}73 + \frac{0{,}10}{23{,}60} \approx 0{,}73$$

Então, $x \approx 0{,}73 \Rightarrow 73\%$ a.a. $\Rightarrow \frac{73}{12}$ **%**a.m. $\approx 6{,}08\,\%$ a.m.