

Gabarito da Lista de Equações Diferenciais Ordinárias

Exercício 1:

(a) Método de Euler (Método das Tangentes)

$$y'(x) + 2y(x) = 0 \Rightarrow y'(x) = -2y(x) \Rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dx} = -2y = f(x, y) \\ y(0) = y_0 = 1 \end{cases}$$

Dados do Problema: $y_0 = 1$, $h = 0.2$, $x \in [0, 1]$

Este método consiste em aplicar a seguinte fórmula iterativa:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad , \quad n \geq 0$$

Então:

(1)

$$x_0 = 0, y_0 = 1, f(x_0, y_0) = -2y_0 = -2(1) = -2$$

$$\Rightarrow y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) \Rightarrow y_1 = 1 + 0.2(-2) = 1 - 0.4 = 0.6$$

(2)

$$x_1 = 0.2, y_1 = 0.6, f(x_1, y_1) = -2y_1 = -2(0.6) = -1.2$$

$$\Rightarrow y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) \Rightarrow y_2 = 0.6 + 0.2(-1.2) = 0.6 - 0.24 = 0.36$$

(3)

$$x_2 = 0.4, y_2 = 0.36, f(x_2, y_2) = -2y_2 = -2(0.36) = -0.72$$

$$\Rightarrow y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) \Rightarrow y_3 = 0.36 + 0.2(-0.72) = 0.36 - 0.144 = 0.216$$

(4)

$$x_3 = 0.6, y_3 = 0.216, f(x_3, y_3) = -2y_3 = -2(0.216) = -0.432$$

$$\Rightarrow y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3) \Rightarrow y_4 = 0.216 + 0.2(-0.432) = 0.1296$$

(5)

$$x_4 = 0.8, y_4 = 0.1296, f(x_4, y_4) = -2y_4 = -2(0.1296) = -0.2592$$

$$\Rightarrow y_5 = y_4 + hf(x_4, y_4) \Rightarrow y_5 = 0.1296 + 0.2(-0.2592) = 0.07776$$

(6) $x_5 = 1.0$, $y_5 = 0.07776$ (Método de Euler)

(b) Método de Euler Aperfeiçoado (ou Runge-Kutta de 2ª Ordem):

Este método consiste em aplicar as seguintes fórmulas iterativas:

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$u_{n+1} = y_n + hk_1 \quad (\text{Preditor})$$

$$k_2 = f(x_{n+1}, u_{n+1})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

Assim, temos:

(1)

$$x_0 = 0, y_0 = 1$$

$$\Rightarrow k_1 = f(x_0, y_0) = -2y_0 = -2$$

$$u_1 = y_0 + hk_1 = 1 + 0.2(-2) = 0.6 \quad (\text{Preditor})$$

$$k_2 = f(x_1, u_1) = -2u_1 = -1.2$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = 1 + 0.1(-2 - 1.2) = 1 - 0.32 = 0.68 \quad (\text{Corretor})$$

(2)

$$x_1 = 0.2, y_1 = 0.68$$

$$\Rightarrow k_1 = f(x_1, y_1) = -2y_1 = -1.36$$

$$u_2 = y_1 + hk_1 = 0.68 + 0.2(-1.36) = 0.408 \quad (\text{Preditor})$$

$$k_2 = f(x_2, u_2) = -2u_2 = -0.816$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = 0.68 + 0.1(-1.36 - 0.816) = 0.4624 \quad (\text{Corretor})$$

(3)

$$x_2 = 0.4, y_2 = 0.4624$$

$$\Rightarrow k_1 = f(x_2, y_2) = -2y_2 = -0.9248$$

$$u_3 = y_2 + hk_1 = 0.4624 + 0.2(-0.9248) = 0.27744 \quad (\text{Preditor})$$

$$k_2 = f(x_3, u_3) = -2u_3 = -0.55488$$

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = 0.4624 + 0.1(-0.9248 - 0.55488) = 0.314432 \quad (\text{Corretor})$$

(4)

$$x_3 = 0.6, y_3 = 0.314432$$

$$\Rightarrow k_1 = f(x_3, y_3) = -2y_3 = -0.628864$$

$$u_4 = y_3 + hk_1 = 0.314432 + 0.2(-0.628864) = 0.1886592 \quad (\text{Preditor})$$

$$k_2 = f(x_4, u_4) = -2u_4 = -2(0.1886592) = -0.3773184$$

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = 0.314432 + 0.1(-0.628864 - 0.3773184) = 0.21381376 \quad (\text{Corretor})$$

(5)

$$x_4 = 0.8, y_4 = 0.21381376$$

$$\Rightarrow k_1 = f(x_4, y_4) = -2y_4 = -0.42762752$$

$$u_5 = y_4 + hk_1 = 0.21381376 + 0.2(-0.42762752) = 0.128288256 \quad (\text{Preditor})$$

$$k_2 = f(x_5, u_5) = -2u_5 = -0.256576512$$

$$y_5 = y_4 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = 0.21381376 + 0.1(-0.684204032) = 0.145393356 \quad (\text{Corretor})$$

(6)

$$\mathbf{x_5 = 1.0, y_5 = 0.145393356 \quad (\text{Euler Aperfeiçoado})}$$

(c) Método de Runge-Kutta (ou Runge-Kutta de 4ª Ordem):

Suponha que queremos calcular as aproximações y_1, y_2, \dots, y_n para os valores verdadeiros $y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_n)$ e agora queremos calcular $y_{n+1} \approx y(x_{n+1})$.

Então,

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx = \int_{x_n}^{x_n+h} y'(x) dx$$

pele teorema fundamental do cálculo. Assim, a Regra de Simpson para integração numérica fornece:

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) \approx \frac{h}{6} \left[y'(x_n) + 4y' \left(x_n + \frac{h}{2} \right) + y'(x_{n+1}) \right] = \frac{h}{6} \left[y'(x_n) + 2y' \left(x_n + \frac{h}{2} \right) + 2y' \left(x_n + \frac{h}{2} \right) + y'(x_{n+1}) \right]$$

Repare que separamos em soma de termos o termo $4y' \left(x_n + \frac{h}{2} \right)$ porque serão inclinações diferentes para o método.

Dessa forma, usando $y'(x_n) \approx y'_n = f(x_n, y_n)$, chamaremos as inclinações de :

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f \left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1 \right)$$

$$k_3 = f \left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_2 \right)$$

$$k_4 = f(x_{n+1}, y_n + hk_3)$$

Quando estas substituições são feitas, o resultado é a fórmula :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Então, para este exercício, faremos:

(1)

$$x_0 = 0, y_0 = 1$$

$$\Rightarrow k_1 = f(x_0, y_0) = -2y_0 = -2$$

$$k_2 = f \left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} k_1 \right) = f(0.1, 0.8) = -2(0.8) = -1.6$$

$$k_3 = f \left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} k_2 \right) = f(0.1, 0.84) = -2(0.84) = -1.68$$

$$k_4 = f(x_1, y_0 + hk_3) = f(0.2, 0.664) = -2(0.664) = -1.328$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1 + \frac{0.2}{6}(-2 - 3.2 - 3.36 - 1.328) = 0.6704$$

(2)

$$x_1 = 0.2, y_1 = 0.6704$$

$$\Rightarrow k_1 = f(x_1, y_1) = -2y_1 = -2(0.6704) = -1.3408$$

$$k_2 = f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_1\right) = -2y_1 - 0.2k_1 = -1.07264$$

$$k_3 = f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_2\right) = -2y_1 - 0.2k_2 = -1.126272$$

$$k_4 = f(x_2, y_1 + hk_3) = f(0.4, 0.4451456) = -2(0.4451456) = -0.8902912$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.44943616$$

(3)

$$x_2 = 0.4, y_2 = 0.44943616$$

$$\Rightarrow k_1 = f(x_2, y_2) = -2y_2 = -2(0.44943616) = -0.89887232$$

$$k_2 = f\left(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{h}{2}k_1\right) = -0.719097856$$

$$k_3 = f\left(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{h}{2}k_2\right) = -0.755052748$$

$$k_4 = f(x_3, y_2 + hk_3) = -0.59685122$$

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.301302001$$

(4)

$$x_3 = 0.6, y_3 = 0.301302001$$

$$\Rightarrow k_1 = f(x_3, y_3) = -2y_3 = -2(0.301302001) = -0.602604002$$

$$k_2 = f\left(x_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{h}{2}k_1\right) = -0.482083201$$

$$k_3 = f\left(x_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{h}{2}k_2\right) = -0.699020642$$

$$k_4 = f(x_4, y_3 + hk_3) = -0.322995745$$

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.191708419$$

(5)

$$x_4 = 0.8, y_4 = 0.191708419$$

$$\Rightarrow k_1 = f(x_4, y_4) = -2y_4 = -2(0.191708419) = -0.383416839$$

$$k_2 = f\left(x_4 + \frac{h}{2}, y_4 + \frac{h}{2}k_1\right) = -0.306733471$$

$$k_3 = f\left(x_4 + \frac{h}{2}, y_4 + \frac{h}{2}k_2\right) = -0.322070144$$

$$k_4 = f(x_5, y_4 + hk_3) = -0.254588781$$

$$y_5 = y_4 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.128521324$$

(6) $x_5 = 1.0$, $y_5 = 0.128521324$ (RK 4)

(d) Método da Predição-Correção de 4ª Ordem (Métodos de Adams):

(1) Adams-Bashforth (Preditor):

$$u_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}) , \text{ usando a notação } f_n = f(x_n, y_n)$$

(2) Adams-Moulton (Corretor):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1}^* + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}) , \text{ onde } f_{n+1}^* = f(x_{n+1}, u_{n+1})$$

Primeiro, devemos calcular y_1 , y_2 e y_3 por Runge-Kutta de 4ª Ordem(RK-4). Depois, para calcular de y_4 em diante, usamos o Preditor e o Corretor de Adams acima.

Então, agora vamos resolver o exercício com esse método:

(1)

Pela letra (c), temos $y_1 = 0.6704$, $y_2 = 0.44943616$ e $y_3 = 0.301302001$

Com as identificações $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ e $f(x,y) = -2y$, obtemos:

$$f_0 = f(x_0, y_0) = -2 ; f_1 = f(x_1, y_1) = -1.3408 ; f_2 = f(x_2, y_2) = -0.89887232 ;$$

$$f_3 = f(x_3, y_3) = -0.602604002$$

Com os valores acima, o Preditor (1) nos fornece então:

$$u_4 = y_3 + \frac{h}{24}(55f_3 - 59f_2 + 37f_1 - 9f_0) = 0.301302001 + \frac{0.2}{24}(-11.71935323) = 0.203640724$$

Para utilizar o corretor, precisamos primeiro de:

$$f_4^* = f(x_4, u_4) = -2u_4 = -0.407281448$$

Assim, temos:

$$y_4 = y_3 + \frac{0.2}{24}(9f_4^* + 19f_3 - 5f_2 + f_1) = 0.301302001 + \frac{0.2}{24}(-11.96144747) = 0.201623272$$

(2)

Ainda temos que calcular y_5 . Vamos repetir o processo:

Preditor:

$$u_5 = y_4 + \frac{h}{24}(55f_4^* - 59f_3 + 37f_2 - 9f_1) = 0.201623272 + \frac{0.2}{24}(-8.037919362) = 0.13464061$$

Corretor:

$$y_5 = y_4 + \frac{0.2}{24}(9f_5^* + 19f_4^* - 5f_3 + f_2), \text{ onde } f_5^* = f(x_5, u_5) = -2u_5 = -0.269281221$$

Assim, temos finalmente:

$$y_5 = 0.201623272 + \frac{0.2}{24}(-8.047730811) = 0.134558848$$

Portanto, $x_5 = 1.0$, $y_5 = 0.134558848$ (**Predição–Correção de Quarta Ordem**)

(e) $y(1) = e^{-2} = 0.135335283$

Portanto, o Método de Predição-Correção de 4ª Ordem se aproximou mais do resultado, mostrando que os algoritmos de ordem superior são mais precisos.

Exercício 2:

$$xy'(x) - x^2 y(x) - 2 = 0 \Rightarrow \underset{\div x}{y'(x) - xy(x) - \frac{2}{x}} = 0 \Rightarrow y'(x) = xy(x) + \frac{2}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = xy + \frac{2}{x} = f(x, y)$$

Usar Euler Aperfeiçoado para:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = xy + \frac{2}{x}$$

$$y_0 = 3, x_0 = 1, h = 0.1$$

até $x_5 = 1.5$.

Exercício 3:

Obs.: Toda vez que tivermos um exercício sobre Equação Diferencial de Segunda Ordem, devemos transformá-la em um sistema de Equações de Primeira Ordem, fazendo a substituição $y' = z$ (aqui usei z , mas poderia ser qualquer outra variável arbitrária).

$$y''(x) + y(x) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0 \Rightarrow y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = -y = f(x, y, y')$$

Vou fazer as seguintes substituições :

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z) = z & , y_0 = 0 \\ z' = g(x, y, z) = -y & , z_0 = \frac{1}{\pi} \end{cases}$$

(a) Usando Método de Euler, temos que resolver o sistema:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n, z_n) = y_n + hz_n \\ z_{n+1} = z_n + hg(x_n, y_n, z_n) = z_n - hy_n \end{cases}$$

Assim, temos:

(1)

$$\begin{aligned} y_0 = 0, z_0 = \frac{1}{\pi}, x_0 = 0 \\ \Rightarrow y_1 = y_0 + 0.2z_0 = 0 + 0.2\left(\frac{1}{\pi}\right) = 0.063661977 \\ z_1 = z_0 - 0.2y_0 = \frac{1}{\pi} = 0.318309886 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} y_1 = 0.063661977, z_1 = 0.318309886, x_1 = 0.2 \\ \Rightarrow y_2 = y_1 + 0.2z_1 = 0.127323954 \\ z_2 = z_1 - 0.2y_1 = 0.30557749 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} y_2 = 0.127323954, z_2 = 0.30557749, x_2 = 0.4 \\ \Rightarrow y_3 = y_2 + 0.2z_2 = 0.188439452 \\ z_3 = z_2 - 0.2y_2 = 0.280112699 \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} y_3 = 0.188439452, z_3 = 0.280112699, x_3 = 0.6 \\ \Rightarrow y_4 = y_3 + 0.2z_3 = 0.244461991 \\ z_4 = z_3 - 0.2y_3 = 0.242424808 \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} y_4 = 0.244461991, z_4 = 0.242424808, x_4 = 0.8 \\ \Rightarrow y_5 = y_4 + 0.2z_4 = 0.292946952 \\ z_5 = z_4 - 0.2y_4 = 0.193532409 \end{aligned}$$

Em outras palavras,

$$y(1,0) \approx 0.292946952$$

(Euler)

$$y'(1,0) \approx 0.193532409$$

(b) Usando o Método de Euler Aperfeiçoado:

Usando o mesmo sistema encontrado no item (a):

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z) = z & , y_0 = 0 \\ z' = g(x, y, z) = -y & , z_0 = \frac{1}{\pi} \end{cases}$$

Temos para o Método de Euler Aperfeiçoado as seguintes fórmulas iterativas:

Preditores:

$$\begin{cases} u_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n, z_n) = y_n + hz_n \\ v_{n+1} = z_n + hg(x_n, y_n, z_n) = z_n - hy_n \end{cases}$$

Corretores:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n, z_n) + f(x_{n+1}, u_{n+1}, v_{n+1})] = y_n + \frac{h}{2} [z_n + v_{n+1}] \\ z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2} [g(x_n, y_n, z_n) + g(x_{n+1}, u_{n+1}, v_{n+1})] = z_n - \frac{h}{2} [y_n + u_{n+1}] \end{cases}$$

(1)

$$y_0 = 0, z_0 = \frac{1}{\pi}, h = 0.2$$

$$u_1 = y_0 + hz_0 = 0.063661977$$

$$v_1 = z_0 - hy_0 = 0.318309886$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} [z_0 + v_1] = 0.063661977$$

$$z_1 = z_0 - \frac{h}{2} [y_0 + u_1] = 0.311943688$$

Agora, vocês terão que repetir esse processo até encontrar y_5 e z_5 .

Exercício 4:

Neste exercício, aplique os métodos para:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2000 - 2v}{200 - t} = f(v, t)$$

$$v_0 = 0, t_0 = 0, h = 0.5$$

Exercício 5:

Após as devidas substituições, aplique os métodos para:

$$\frac{dy}{dt} = 0.2y - 0.000002y^2$$

$$y_0 = 1000, t_0 = 0$$

OBS.: Aqui, não foi fornecido o valor de h. Usei h = 0.5.

Exercício 6:

Obs.: O enunciado não disse o valor de h. Aqui, fiz com h=0.5.

$$\begin{cases} x' = 3x - 0.002xy = f(t, x, y) & , & x_0 = 1000 \\ y' = 0.0006xy - 0.5y = g(t, x, y) & , & y_0 = 500 \end{cases}$$

As fórmulas iterativas de Runge-Kutta para o passo de (x_n, y_n) à aproximação seguinte $(x_{n+1}, y_{n+1}) \approx (x(t_{n+1}), y(t_{n+1}))$ são:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(G_1 + 2G_2 + 2G_3 + G_4)$$

onde:

$$F_1 = f(t_n, x_n, y_n)$$

$$F_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}F_1, y_n + \frac{h}{2}G_1\right)$$

$$F_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}F_2, y_n + \frac{h}{2}G_2\right)$$

$$F_4 = f(t_n + h, x_n + hF_3, y_n + hG_3)$$

Analogamente fazemos isso para G_1, G_2, G_3, G_4 .

(1)

$$t_0 = 0, x_0 = 1000, y_0 = 500$$

$$F_1 = f(0, 1000, 500) = 3(1000) - 0.002(1000)(500) = 3000 - 1000 = 2000$$

$$G_1 = g(0, 1000, 500) = 0.0006(1000)(500) - 0.5(500) = 300 - 250 = 150$$

$$F_2 = f(0.25, 1500, 537.5) = 3(1500) - 0.002(1500)(537.5) = 4500 - 1612.5 = 2887.5$$

$$G_2 = g(0.25, 1500, 537.5) = 0.0006(1500)(537.5) - 0.5(537.5) = 483.75 - 268.75 = 215$$

$$F_3 = f(0.25, 1721.875, 553.75) = 3(1721.875) - 0.002(1721.875)(553.75) = 5165.625 - 1906.9765 = 3258.6485$$

$$G_3 = g(0.25, 1721.875, 553.75) = 0.0006(1721.875)(553.75) - 0.5(553.75) = 512.09296 - 276.875 = 235.21796$$

$$F_4 = f(0.5, 2629.3242, 617.6398) = 3(2629.3242) - 0.002(2629.3242)(617.6398) = 7887.9726 - 3247.9505 = 4640.0221$$

$$G_4 = g(0.5, 2629.3242, 617.6398) = 0.0006(2629.3242)(617.6398) - 0.5(617.6398) = 974.38515 - 308.8199 = 665.56525$$

Então,

$$x_1 = x_0 + \frac{h}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4) = 1000 + \frac{1}{6}(2000 + 5775 + 6517.297 + 4640.0221) = 4155.3865$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(G_1 + 2G_2 + 2G_3 + G_4) = 500 + \frac{1}{6}(150 + 430 + 470.43592 + 665.56525) = 786.00018$$

Agora, é com vocês!

Façam até $t_8 = 4$.