Exercícios de Cálculo Numérico
Interpolação Polinomial e Método dos Mínimos Quadrados

1. Para a função dada, seja $x_0 = 0,\ x_1 = 0,6$ e $x_2 = 0,9$. Construa polinômios de grau $n \leq 2$, para aproximar $f(0,45)$, e encontre o valor do erro verdadeiro.

   (a) $f(x) = \cos x$

   (b) $f(x) = \sqrt{(1+x)}$

   (c) $f(x) = \ln(x+1)$

2. Use o Teorema do Erro, e determine uma cota superior do erro, para as aproximações calculadas no exercício 1

3. Sabendo-se que $f(0,81) = 16,94410$ $f(0,83) = 17,56492$ $f(0,86) = 18,50515$ e $f(0,87) = 18,82091$, calcule um valor aproximado de $f(0,84)$, usando:

   (a) Polinômio interpolador de Lagrange de grau $n \leq 1, 2, 3$

   (b) Forma de Newton para polinômio interpolador de grau $n \leq 1, 2, 3$

   (c) Calcule uma cota superior do erro em cada caso, se possível.

4. Seja uma função f tabelada nos pontos x_i igualmente espaçados. Seja h o passo e suponhamos que $|f''(x)| \leq M$ em todo intervalo da tabela. Mostre que, ao se fazer uma interpolação linear da função f no ponto x tomando os pontos consecutivos x_i x_{i+1}, com $x_i < x < x_{i+1}$, o valor absoluto do erro cometido é no máximo $\varepsilon = \dfrac{1}{8}M.h^2$

5. Deseja-se construir uma tabela da função $f(x) = e^x$ no intervalo $[0,\ 1]$ com pontos x_i igualmente espaçados. Seja h o passo. Qual o valor máximo de h para que o erro da interpolação linear em qualquer ponto do intervalo seja menor ou igual a $\epsilon \leq 1.10^{-2}$.

6. Considere a tabela abaixo:

Altura (cm)	183	173	188	163	178
Peso(kg)	79	69	82	63	73

   (a) Usando um Polinômio Interpolador de grau dois, calcule a altura aproximada de uma pessoa com peso de 70 kg.

   (b) Dê uma estimativa de erro para o caso anterior.

   (c) Determine a melhor função da forma $\psi(x) = \alpha \text{sen(x)} + \beta \cos(x)$ que ajusta estes pontos e calcule a altura aproximada de uma pessoa com peso de 70 Kg.

7. Sabe-se que ao longo da linha vermelha a velocidade máxima permitida é de $90km/h$ e foram colocados radares para medir a velocidade instantânea dos

carros. Suponha que numa distância $d = 1.0km$, um motorista conferiu através do velocímetro (suponha que o velocímetro seja exato) as seguintes velocidade:

distância	0	0.2	0.3	0.5	0.8	1.0
velocidade	80	85	88	92	85	80

Pergunta-se:

(a) Considere um radar colocado na posição $d = 0,4$. Usando um polinômio interpolador de grau dois ou menor, calcule:

i) Velocidade aproximada neste ponto.

ii) Erro da interpolação neste ponto.

iii) Podemos concluir que o carro não será multado?

(b) Usando o Método dos Mínimos Quadrados faça uma regressão linear e calcule a velocidade esperada em $d = 1,1$

(c) Usando o Método dos Mínimos Quadrados determine o polinômio de segundo grau ótimo, e calcule a velocidade esperada em $d = 1,1$

(d) O jornal "O Globo" publicou a seguinte notícia: Em virtude da estimativa de erro do radar ser de 10% então os carros poderiam andar a uma velocidade máxima de $99km/h$ sem serem multados. O que você pensa sobre isto?

8. A tabela abaixo representa a inflação **bimestral** medida pelo INPC no ano de 2000.

bimestre	*janeiro*	*fevereiro*	*marco*	*maio*	*junho*
inflação(%)	$0,75$	$0,64$	$0,24$	$2,94$	$0,37$

(a) Estime qual foi a inflação em abril , utilizando um polinômio interpolador de grau $n \leq 2$.

(b) Calcule o erro da estimativa anterior.

(c) Podemos garantir,usando o resultado do item anterior, que a inflação semestral foi menor que 6%?.

(d) Determine a inflação do mês de julho, usando um polinômio de grau $n \leq 2$.

9. A tabela abaixo representa o número oficial aproximado de pessoas com DENGUE, ou seja, infectados pelo virus (Aëdes aegypti) no Rio de Janeiro:

data	1999	2000	2001	2002_1	2002_2
números	4.300	2.200	36.500	41.600	42700

Os dados relativos $2002_{1,2}$ correspondem ao número de casos registrados nos meses de janeiro e fevereiro.

(a) Usando uma reta, estime o número de infectados no mês de março de 2002, pelo método dos mínimos quadrados.

(b) Estime qual foi o número de infectados pelo virus em fevereiro de 2001, utilizando um polinômio interpolador de grau $n \leq 2$.

(c) Estime o erro na aproximação calculada no item c.

10. Qual é a diferença entre interpolação polinomial e o ajuste de curvas pelo método dos mínimos quadrados? É possível obter um mesmo polinômio que interpola e faz o ajuste de curvas pelo método dos mínimos quadrados?

11. O número de bactérias, por unidade de volume, existente em uma cultura após x horas é dado na tabela abaixo:

número de horas	0	1	2	3	4	5	6
número de bactérias	32	47	65	92	132	190	275

(a) Ajuste os dados acima a curva $y = ae^{bx}$ pelo método dos mínimos quadrados.

(b) Quantas horas seriam necessárias para que o número de bactérias por unidade de volume ultrapasse 2000?

12. Dada a tabela abaixo, faça o gráfico de dispersão dos dados e ajuste uma curva da melhor maneira possível.

x	$0,5$	$0,75$	1	$1,5$	$2,0$	$2,5$	$3,0$
y	$-2,8$	$-0,6$	1	$3,2$	$4,8$	$6,0$	$7,0$

13. **Interpolação em duas variáveis**

Seja Ω um retângulo $R = \{(x, y);\quad a \leq x \leq b;\quad c \leq y \leq d\}$ e as seguintes partições: $R_x : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ e $R_y : c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$. Considere os polinômios de Lagrange $\{L_i(x) : 0 \leq i \leq n\}$ e $\{L_j(y) : 0 \leq j \leq m\}$ de grau n e m respectivamente. Definindo

$$P(x, y) = \sum_{i=j=0}^{n,m} f(x_i, y_j).L_{ij}(x, y)$$

obtemos um polinômio interpolador de grau n em x e m em y, onde

$$L_{ij}(x, y) = L_i(x)L_j(y)$$

Considere a tabela abaixo:

Altura (cm)	183	173	188	163	178
Peso(kg)	79	69	82	63	73
Velocidade(km/h)	15	16	14	14	15

Determine, a velocidade aproximada de uma pessoa, que mede 175 cm e pesa 75 kg, usando um polinômio interpolador de grau 2 em cada variável.