

Exercícios de Cálculo Numérico Integração Numérica

1. Calcule as integrais abaixo pela regra dos trapézios e pela regra 1/3 de Simpson, usando 4 e 6 divisões do intervalo $[a, b]$:

$$(a) \int_1^2 e^{-x} dx, \quad (b) \int_1^4 \sqrt{x} dx, \quad (c) \int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x}} dx, \quad (d) \int_0^{0.6} \frac{1}{1+x} dx.$$

2. Determine o número mínimo de subintervalos necessários para que cada uma das integrais do exercício 1, tenham precisão $\varepsilon \leq 1.10^{-5}$
3. Verifique que para qualquer polinômio $P(x)$ de grau $n \leq 1$, o valor da integral;

$$\int_a^b P(x) dx = P(m)$$

é exato, para $m = \frac{a+b}{2}$ (Regra do ponto médio).

4. Dê um exemplo de uma função, onde a regra dos trapézios calcula o valor exato da integral.
5. Dê um exemplo de uma função, onde a regra 1/3 de Simpson calcula o valor exato da integral.
6. Calcule a área definida por $f(x)$ pela regra 1/3 de Simpson:

x	2	4	6	8	10	12	14	16	18
f(x)	0.5	0.9	1.1	1.3	1.7	2.1	1.5	1.1	0.6

7. Considere a integral abaixo:

$$I = \int_0^1 x^3 e^x dx$$

Sabe-se que o valor exato da integral é $I = 0,5634363$. Denotemos por $I_t(h)$ e $I_s(h)$, o resultado da integral obtido, respectivamente, pelo método dos trapézios e 1/3 de Simpson. Seja $h = 0,5$.

- (a) Calcule $I_t(h)$ e $I_t(h/2)$
- (b) Calcule $I_s(h)$ e $I_s(h/2)$
- (c) Calcule $R_1(h) = \frac{4I_t(h/2) - I_t(h)}{3}$ (Método de Romberg).
- (d) Compare com o valor exato e conclua qual é o melhor resultado.
8. Considere as integrais:

$$(I) \int_a^b \int_c^d g(x, y) dx dy, \quad (II) \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x, y, z) dx dy dz.$$

Determine uma fórmula geral para o cálculo das integrais usando:

- (a) Regra dos Trapézios.

(b) Regra 1/3 de Simpson

(c) Considere os seguintes valores: $a = c = e = 0$; $b = 0.5$, $d = 1.0$, $f = 1.0$ e as funções $g(x, y) = y.e^x$, $g(x, y, z) = (xy)^z$. Calcule valor numérico de cada integral usando as fórmulas anteriores, com passo $h_1 = h_2 = h_3 = 0.5$, para o método dos trapézios e $h_1 = 0.25$ e $h_2 = h_3 = 0.5$, para o método (1/3) de Simpson.