Gabarito – Sistemas Lineares

Exercício 1:

(a)

$$Primeira\ Linha: \alpha_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}|}{|a_{11}|} = 3 > 1$$

$$Segunda\ Linha: \alpha_2 = \frac{|a_{21}| + |a_{23}| + |a_{24}|}{|a_{22}|} = 2 > 1$$

$$Terceira\ Linha: \alpha_3 = \frac{|a_{31}| + |a_{32}| + |a_{34}|}{|a_{33}|} = 1$$

$$Quarta\ Linha: \alpha_4 = \frac{|a_{41}| + |a_{42}| + |a_{43}|}{|a_{44}|} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \underset{1 \le k \le 4}{máx}(\alpha_k) = 3 > 1$$

Logo, não satisfaz o Critério das Linhas.

(b)

$$Primeira\ Linha: \beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}|}{|a_{11}|} = 3 > 1$$

$$Segunda\ Linha: \beta_2 = \frac{\beta_1|a_{21}| + |a_{23}| + |a_{24}|}{|a_{22}|} = 6 > 1$$

$$Terceira\ Linha: \beta_3 = \frac{\beta_1|a_{31}| + \beta_2|a_{32}| + |a_{34}|}{|a_{33}|} = 3 > 1$$

$$Quarta\ Linha: \beta_4 = \frac{\beta_1|a_{41}| + \beta_2|a_{42}| + \beta_3|a_{43}|}{|a_{44}|} = \frac{3}{2}$$

$$\beta = \underset{1 \le k \le 4}{máx}(\beta_k) = 6 > 1$$

Logo, não satisfaz o Critério de Sassenfeld *(c) Como este sistema não satisfaz o Critério das Linhas, então não podemos ter garantia de convergência em nenhum dos métodos.*

OBS.: O Critério de Sassenfeld pode ser satisfeito mesmo que o Critério das Linhas não o seja.

(d)

Permutando - se as duas primeiras equações do sistema, temos :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 & = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 & = 1 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 & = 1 \\ -x_3 + 2x_4 & = 1 \end{cases}$$

Pelo Critério de Sassenfeld, temos :

$$\beta_1 = 1/2;\ \beta_2 = 3/4;\ \beta_3 = 7/8;\ \beta_4 = 7/16$$

$$\max_{1 \le k \le 4} \beta_k = 7/8 < 1$$

Logo, o sistema satisfaz o Critério de Sassenfeld

(e)

Resolvendo por Gauss-Seidel, fazemos as seguintes iterações:

$$x_1^{(k)} = \frac{1 + x_2^{(k-1)}}{2}$$

$$x_2^{(k)} = \frac{1 - x_1^{(k)} + x_3^{(k-1)}}{2}$$

$$x_3^{(k)} = \frac{1 + x_2^{(k)} + x_4^{(k-1)}}{2}$$

$$x_4^{(k)} = \frac{1 + x_3^{(k)}}{2}$$

Partindo de $X^{(0)} = (0,0,0,0)$ *, achamos na* 9^a *iteração uma aproximação com precisão menor ou igual a 0,001.*

$$X^{(9)} = (0.9085, 0.8177, 1.5478, 1.2724)$$

Lembrando que a cada iteração, temos que verificar sempre se $\underset{1\le i\le 4}{Máx}\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right| \le 0.001$

Exercício 2:

(a)

Com pivoteamento parcial:

(a-1) Ver quem tem o maior módulo na primeira coluna da matriz aumentada (matriz dos coeficientes mais os termos independentes):

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 10 & 1 & 0 & 1 & -8 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$(i)\ Máx\{1, 0,\ 10, 1\} = 10$ *(este vai ser o pivô!)*

(ii) Permutar a primeira linha e a linha do pivô :

$$\begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 8 \end{bmatrix}\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}$$

Os multiplicadores desta etapa serão :

$m_{31} = 1/10; \quad L_3 \leftarrow L_3 - m_{31}L_1$

$m_{41} = 1/10; \quad L_4 \leftarrow L_4 - m_{41}L_1$

Assim,

(a - 2)

$$\begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 & 1 & -8 \\ \mathbf{0} & 1 & -2 & 0 & 3 \\ \mathbf{0} & -31/10 & 1 & -11/10 & -2/10 \\ \mathbf{0} & -1/10 & -1 & 29/10 & 88/10 \end{bmatrix}$$

$(\ i\ )\ Máx\{1, 31/10, 1/10\} = 31/10$ *(-31/10 vai ser o pivô na segunda coluna!)*

(ii) Permutar a segunda linha e a linha do pivô.

$$\begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 & 1 & -8 \\ \mathbf{0} & -31/10 & 1 & -11/10 & -2/10 \\ \mathbf{0} & 1 & -2 & 0 & 3 \\ \mathbf{0} & -1/10 & -1 & 29/10 & 88/10 \end{bmatrix}$$

E os multiplicadores desta etapa serão :

$m_{32} = -10/31; \quad L_3 \leftarrow L_3 - m_{32}L_2$

$m_{42} = 1/31; \quad L_4 \leftarrow L_4 - m_{42}L_2$

Assim,

$(a-3)$

$$\begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 & 1 & -8 \\ \mathbf{0} & -31/10 & 1 & -11/10 & -2/10 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -52/31 & -11/31 & 91/31 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -32/31 & 91/31 & 273/31 \end{bmatrix}$$

(i)*Máx*$\{52/31, 32/31\} = 52/31$ *(não vamos precisar permutar nada porque ele já pertence à diagonal principal.*

E o multiplicador desta etapa é:

$m_{43} = 32/52; \quad L_4 \leftarrow L_4 - m_{43}L_3$

E finalmente, temos a matriz reduzida:

$$\begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 & 1 & -8 \\ \mathbf{0} & -31/10 & 1 & -11/10 & -2/10 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -52/31 & -11/31 & 91/31 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1271/403 & 7 \end{bmatrix}$$

Solução do sistema: (-0.8780, -1.4390, -2.2195, 2.2195)

(b)

No pivoteamento parcial, PA = LU, onde P é a matriz permutação das linhas da matriz identidade.

Então,

$PAx = Pb \Rightarrow LUx = Pb$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \mathbf{0} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 1/10 & -10/31 & 1 & \mathbf{0} \\ 1/10 & 1/31 & 32/52 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & -31/10 & 1 & -11/10 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -52/31 & -11/31 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1271/403 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} -0.8780 \\ -1.4390 \\ -2.2195 \\ 2.2195 \end{bmatrix} \quad ; \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$P = P^{(1)}P^{(0)}$

onde

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ representa a troca das linhas 2 e 3 da matriz identidade}$$

$$P^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ representa a troca das linhas 1 e 3 da matriz identidade}$$

$$\text{Então, } P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E devemos escrever o sistema linear LUx = Pb substituindo as matrizes acima nesta expressão.

Determinação da matriz inversa:

$$PAx = Pb \Rightarrow LUx = Pb \Rightarrow PA = LU \Rightarrow (PA)^{-1} = (LU)^{-1} \Rightarrow A^{-1}P^{-1} = U^{-1}L^{-1} \Rightarrow \boldsymbol{A^{-1} = U^{-1}L^{-1}P}$$

*Deter **min** ação de* U^{-1} **:**

Usando Forma Escada Reduzida por Linhas :

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{10} & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -31/10 & 1 & -11/10 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -52/31 & -11/31 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1271/403 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1/10 & 0 & 1/10 & 1/10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{-31/10} & 1 & -11/10 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -52/31 & -11/31 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1271/403 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{cccc|ccccl} 1 & 1/10 & 0 & \mathbf{1/10} & 1/10 & 0 & 0 & 0 & L_1 \\ \mathbf{0} & 1 & -10/31 & \mathbf{11/31} & 0 & -10/31 & 0 & 0 & L_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & \mathbf{11/52} & 0 & 0 & -31/52 & 0 & L_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & 0 & 403/1271 & L_4 \end{array}$$

*Agora**,** temos que anular os elementos acima dos 1' s a partir da última coluna até a segunda.*

Na última coluna, temos acima de 1 : 11/52, 11/31 e 1/10, os quais serão anulados através das seguintes operações :

$L_3 \leftarrow L_3 - (11/52)L_4$
$L_2 \leftarrow L_2 - (11/31)L_4$
$L_1 \leftarrow L_1 - (1/10)L_4$

Assim, temos:

$$\begin{array}{cccc|ccccl} 1 & 1/10 & 0 & 0 & 1/10 & 0 & 0 & -403/12710 & L_1 \\ \mathbf{0} & 1 & -10/31 & 0 & \mathbf{0} & 1 & 0 & -4433/39401 & L_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -31/52 & -4433/66092 & L_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 403/1271 & L_4 \end{array}$$

Agora, temos que anular o -10/31 acima do 1 na terceira coluna. Assim, temos:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc|c} 1 & 1/10 & 0 & 0 & 1/10 & 0 & 0 & -403/12710 & L_1 \\ \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 1 & -10/52 & -0.134 & L_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -31/52 & -4433/66092 & L_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 403/1271 & L_4 \end{array}\right]$$

E finalmente, eliminamos 1/10 na segunda coluna:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/10 & 0 & 1/52 & -0.018 & L_1 \\ \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 1 & -10/52 & -0.134 & L_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -31/52 & -0.067 & L_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 403/1271 & L_4 \end{array}\right]$$

Portanto,

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} 1/10 & 0 & 1/52 & -0.018 \\ 0 & 1 & -10/52 & -0.134 \\ 0 & 0 & -31/52 & -0.067 \\ 0 & 0 & 0 & 403/1271 \end{bmatrix}$$

Para determinar L^{-1}, basta apenas trocar o sinal dos multiplicadores da matriz L:

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/10 & 10/31 & 1 & 0 \\ -1/10 & -1/31 & -32/52 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora, para determinar a matriz inversa, basta substituir as matrizes achadas acima na fórmula $\boldsymbol{A^{-1} = U^{-1}L^{-1}P}$.

(c)

Como o Critério das Linhas não é satisfeito, não temos garantia de convergência para o Método de Gauss-Seidel, seja qual for a aproximação inicial.

Exercício 3:

*(a) A aproximação $\bar{x}_1^t$ é a melhor porque suas ordenadas se aproximam mais de zero (Observe que Ax = b é o mesmo que Ax – b = **0**)*

(b) Usar método de Eliminação de Gauss com Pivoteamento Parcial

Resposta: $x^t = (0.39685, 0.16438)$

(c) A matriz A do sistema está próxima de uma matriz singular (não possui inversa). Portanto, o sistema é mal condicionado.

Exercício 4:

Fonte – Pág. 176 do livro "Cálculo Numérico – Aspectos numéricos e computacionais" – Makron Books.

Exercício 5:

(a) Observe que os coeficientes da terceira linha não satisfazem o Critério das Linhas.

Logo, precisamos permutar a segunda e a terceira linhas e temos agora o sistema equivalente:

$$\begin{cases} kx_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 6x_2 + x_3 = 3 \\ kx_1 + 6x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{|a_{21}| + |a_{23}|}{|a_{22}|} = \frac{1}{3} < 1$$

Mas, ainda assim, temos para a primeira linha:

$$\frac{|a_{12}| + |a_{13}|}{|a_{11}|} = \frac{4}{k} < 1 \Rightarrow k > 4 \quad (1)$$

e para a terceira linha :

$$\frac{|a_{31}| + |a_{32}|}{|a_{33}|} = k + 6 < 1 \Rightarrow k < -5 \, (2)$$

Como $(1) \cap (2) = \varnothing$*, precisamos rearrumar o sistema de novo de forma que a segunda linha não se modifique, pois ela já satisfaz o Critério das Linhas.*

O que devemos fazer, neste caso, é permutar as colunas de coeficientes da segunda e da terceira linhas de modo que a interseção desta vez não seja vazia.

$$\begin{cases} kx_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow k > 4 \ (1) \\ x_1 + 6x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 6x_2 + kx_3 = 2 \Rightarrow k > 7 \ (2) \end{cases}$$

$(1) \cap (2): \ k > 7$

Portanto, para $k \in (7, +\infty)$ *temos garantia de convergência*

(b) *Resolver o sistema modificado em (b) por Gauss-Jordan com k = 8*
Resposta: (-0.0570, 0.5334, -0.1427)

(c) *Método de Gauss-Seidel converge mais rápido.*

Exercício 6:

(a) *Fonte – "Cálculo Numérico – Aspectos Teóricos e Computacionais" – Pág. 126*

Obs.: supor que o elemento que está na posição a_{kk} *é diferente de zero no início da etapa k.*

// Eliminação de Gauss sem pivoteamento:

Para *k = 1, 2, 3* ***faça***
  Para *i = 2, 3, 4* ***faça***
    $m = \dfrac{a_{jk}}{a_{kk}}$
    $a_{ik} = 0$
    Para *j = k+1,..., 4* ***faça***
      $a_{ij} = a_{ij} - m a_{kj}$
      $b_i = b_i - m b_k$

// Resolução do sistema:

$x_4 = b_4 / a_{44}$
Para $k = 3, 2, 1$ ***faça***
  $s = 0$
  Para $j = (k+1), \dots, 4$ ***faça***
    $s = s + a_{kj} x_j$
    $x_k = (b_k - s) / a_{kk}$

(b)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{m_{21}=-1/2 \\ L_2 \leftarrow L_2+(1/2)L_1}} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 5/2 & 1 & 0 & -19/2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{m_{32}=2/5 \\ L_3 \leftarrow L_3-(2/5)L_2}} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 5/2 & 1 & 0 & -19/2 \\ 0 & 0 & 8/5 & -1 & -11/5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{m_{43}=-5/8 \\ L_4 \leftarrow L_4+(5/8)L_3}}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 5/2 & 1 & 0 & -19/2 \\ 0 & 0 & 8/5 & -1 & -11/5 \\ 0 & 0 & -1 & 3/8 & -3/8 \end{bmatrix}$$

Por substituição retroativa, temos:

$$x_4 = \frac{-3/8}{3/8} = -1$$

$$x_3 = \frac{-11/5 + (-1)}{8/5} = -2$$

$$x_2 = \frac{-19/2 - (-2)}{5/2} = -3$$

$$x_1 = \frac{-5 + (-3)}{2} = -4$$

Solução: S = {(-1, -3, -2, -4)}

(c) Verificar quando resolver o algoritmo.