GABARITO – LISTA DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Exercício 1:

(a-i) Regra dos Trapézios, n = 4:

$$\int \underbrace{e^{-x}}_{f(x)} dx \approx \frac{1}{8}\left[f(1) + 2f(1.25) + 2f(1.5) + 2f(1.75) + f(2)\right] = 0.233754065$$

(a-ii) Regra dos Trapézios, n = 6:

$$\int \underbrace{e^{-x}}_{f(x)} dx \approx \frac{1}{12}\left[f(1) + 2f(7/6) + 2f(4/3) + 2f(3/2) + 2f(5/3) + 2f(11/6) + f(2)\right] = 0.233082205$$

(a-iii) Regra de Simpson, n = 4:

$$\int \underbrace{e^{-x}}_{f(x)} dx \approx \frac{1}{12}\left[f(1) + 4f(1.25) + 2f(1.5) + 4f(1.75) + f(2)\right] = 0.232549167$$

(a-iv) Regra de Simpson, n = 6:

$$\int \underbrace{e^{-x}}_{f(x)} dx \approx \frac{1}{18}\left[f(1) + 4f(7/6) + 2f(4/3) + 4f(3/2) + 2f(5/3) + 4f(11/6) + f(2)\right] = 0.232545151$$

Exercício 2:

(a) Erro pelo Método dos Trapézios:

$$E_{TRAP} \le \frac{(b-a)^3 \left|f''(x)\right|_{MÁX}}{12n^2} \le 10^{-5}$$

$$f''(x) = e^{-x} \Rightarrow \left|e^{-x}\right|_{MÁX} = \left|e^{-1}\right| = 0.367879441$$

a = 1, b = 2 $\Rightarrow$ b – a = 1

Resp.: $n_{TRAP} = 56$

(b) Erro pelo Método de Simpson (aqui, n tem que ser par!):

$$E_{TRAP} \le \frac{(b-a)^5 \left|f^{(iv)}(x)\right|_{MÁX}}{180n^4} \le 10^{-5}$$

$$f''(x) = e^{-x} \Rightarrow \left|e^{-x}\right|_{MÁX} = \left|e^{-1}\right| = 0.367879441$$

Resp.: $n_{SIMP} = 56$

Exercício 3:

$$\int_a^b P(x)dx = (b-a)P(m)$$

$$P(x) = cx + d$$

Usando a Regra dos Trapézios, com n = 2, temos:

$$\int_a^b P(x)dx \approx \frac{b-a}{4}\left[P(a) + 2P\left(\frac{a+b}{2}\right) + P(b)\right]$$

Desenvolvendo essa expressão chegamos a $(b-a)P(m)$, que é o valor exato.

Exercício 4:

Qualquer Polinômio de grau 1 (Vide Exercício 3)

Exercício 5:

Um exemplo:

$$\int_0^2 P_2(x)dx, \text{onde } \mathrm{P}_2(x) = x^2 + 3x + 2, \text{usando } \mathrm{n} = 2$$

Exercício 6:

$$I_{SIMP} = 20.8667$$

Exercício 7:

(a) $I_t(0.5) = 0.782615536$
$I_t(0.25) = 0.619600838$, lembrando que aqui n = 4

(b) $I_s(0.5) = 0.59044041$
$I_s(0.25) = 0.565262605$

(c) Método de Romberg: $R_1(0.5) = 0.565262605$

(d) O melhor resultado é com o Método de Romberg.

Exercício 8:

(a-I) Usando Regra dos Trapézios:

$$\int_a^b \int_c^d g(x,y)dxdy = \int_a^b \underbrace{\left[\int_c^d g(x,y)dy \right]}_{I_t(x)} dx$$

Primeira parte:

$$I_t(x) = \frac{h_2}{2}\left[g(x,y_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} g(x,y_i) + g(x,y_n) \right]$$

$$\text{Como } h_2 = \frac{d-c}{n}, \text{ então:}$$

$$I_t(x) = \frac{d-c}{2n}\left[g(x,y_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} g(x,y_i) + g(x,y_n) \right]$$

Segunda parte:

$$\int_a^b I_t(x)dx \;\; = \frac{d-c}{2n}\int_a^b \underbrace{\left[g(x,y_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} g(x,y_i) + g(x,y_n) \right]}_{f(x)} dx$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{d-c}{2n}\right)\left(\frac{b-a}{2m}\right)\Bigg\{ g(x_0,y_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} g(x_0,y_i) + g(x_0,y_n) \\ &\qquad + 2\sum_{j=1}^{m-1}\left[g(x_j,y_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} g(x_j,y_i) + g(x_j,y_n) \right] \\ &\qquad + g(x_m,y_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} g(x_m,y_i) + g(x_m,y_n) \Bigg\} \end{aligned}$$

(a-II) Para a integral tripla, raciocínio análogo.