Gabarito – Erros

Exercício 1:

(a) Como o expoente máximo é $(15)_{10}$, então o número de bits para o expoente é 5 (lembrando que o número de bits do expoente – aberviado por n.e. – é encontrado através da relação $e_{máx} = 2^{n.e.-1} - 1$).

Assim, montamos a seguinte tabela que relaciona os 5 bits com os expoentes:

Bits	Expoente
00000	-14 (forma desnormalizada)
00001	-14
00010	-13
...	...
01101	-2
01110	-1
01111	0
10000	+1
10001	+2
10010	+3
...	...
11101	+14
11110	+15
11111	∞, NaN ou Indeterminação

O menor número positivo representável nesta máquina na forma **normalizada** deve ter o menor expoente (00001) , zeros na mantissa, além do bit 0 para o sinal do número, que é positivo. Então, temos:

$$\underbrace{0}_{\text{s.n.}}\ \underbrace{00001}_{\text{expoente}}\ \underbrace{00000000}_{\text{mantissa}}$$

$1{,}00000000 \times 2^{-14} \approx 6{,}1035 \times 10^{-5}$

O menor número mesmo está na forma **desnormalizada** e deve ter como menor expoente 00000. Assim, temos:

$$\underbrace{0}_{\text{s.n.}}\ \underbrace{00000}_{\text{expoente}}\ \underbrace{00000001}_{\text{mantissa}}$$

$0{,}00000001 \times 2^{-14} \approx 0{,}0238 \times 10^{-5}$

(b) O maior número positivo representável nesta máquina deve ter o maior expoente (11110), 1's na mantissa, além do bit 0 para o sinal positivo do número. Então, temos:

$$\underbrace{0}_{\text{s.n.}}\ \underbrace{11110}_{\text{expoente}}\ \underbrace{11111111}_{\text{mantissa}}$$

$1{,}11111111 \times 2^{15} = (2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + \ldots + 2^{-8}) \times 2^{15} = 2^7 + 2^8 + 2^9 + \ldots + 2^{15} = 2^{16} - 2^7 = 65536 - 128 = 65408$

(c) $12{,}37 = 12 + 0{,}37$

Parte inteira:

```
12 | 2
 0   6 | 2
     0   3 | 2
         1   1 | 2
             1   0
```

Parte fracionária:

0,37 x 2 = **0**,74
0,74 x 2 = **1**,48
0,48 x 2 = **0**,96
0,96 x 2 = **1**,92
0,92 x 2 = **1**,84
0,84 x 2 = **1**,68
0,68 x 2 = **1**,36
...

Em representação binária: 12,37 = 1100,0101111...

Mas, nesta máquina, que possui apenas 8 dígitos para a mantissa, temos:

$$\underbrace{1,10001011}_{\text{8 bits p/ mantissa}} \times 2^3 = 12,34375$$

$$\underbrace{0}_{\text{s.n.}}\ \underbrace{10010}_{\text{expoente}}\ \underbrace{10001011}_{\text{mantissa}}$$

Erro da representação: ε = 12,37 – 12,34375 = 0,02625

(d)

$$\begin{aligned} 12,37 &= 1,\mathbf{10001011} \times 2^3 \\ \varepsilon &= 0,\mathbf{00000001} \times 2^3 = 1,00000000 \times 2^{-8} \times 2^3 = 0,03125 \\ 12,37+\varepsilon &= 1,\mathbf{10001100} \times 2^3 \end{aligned}$$

Limite da mantissa

Exercício 2:

Polinômio de Taylor de Grau 3

$x \in [-1,1]$

$x_0 = 0$

$f(x) = e^x$

(a)

$$P_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2} + \frac{f'''(x_0)(x - x_0)^3}{3!}$$

quando $x = 0.5$:

$$P_3(0.5) = e^0 + e^0 \cdot 0.5 + \frac{e^0 \cdot (0.5)^2}{2} + \frac{e^0 \cdot (0.5)^3}{6}$$

$$= 1 + 0.5 + 0.125 + \frac{(0.5)^3}{6}$$

$$\approx 1.645833333$$

(b) Limitante superior para o erro:

$$|E_3(x)| \le \frac{|f^{iv}(x)|_{máx} |x - x_0|^4}{4!}$$

Lembrando que $0 < \varepsilon < 0.5$

$f^{iv}(0) = 1$

$f^{iv}(0.5) = e^{0.5} \approx 1.648721271 > 1$ (logo, esse vai ser o valor usado para o limitante)

$$|E_3(0.5)| \le \frac{e^{0.5} \cdot (0.5)^4}{24} \approx 4.29 \times 10^{-3}$$

Exercício 3:

(a)

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2}$$

$$x = 47^\circ = \frac{47\pi}{180}\,\text{rad}$$

$$x_0 = 45^\circ = \frac{\pi}{4}\,\text{rad}$$

$$f(x) = \text{sen}(x)$$
$$f'(x) = \cos(x)$$
$$f''(x) = -\,\text{sen}(x)$$

$$P_2(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$P_2\left(\frac{47\pi}{180}\right) \approx 0.73135867$$

(b) fazer com η = 3

(c)

Usando polinômio de Grau 2 :

$$\int_0^{47\pi/180}\left[P_2(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right]dx$$

$$= \left[\frac{\sqrt{2}}{2}x\right]_{x=0}^{47\pi/180} + \left[\frac{\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right]_{x=0}^{47\pi/180} - \left[\frac{\sqrt{2}}{12}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right]_{x=0}^{47\pi/180}$$

$$\approx 0.305283626$$

Erro associado :

$$E = \int_0^{47\pi/180} \text{sen}(x) - P_2(x) \approx 0.012718013$$

Exercício 4:

(a)

$$I_1 = \frac{1}{e}$$

$$I_2 = 1 - \frac{2}{e} = 1 - 2!\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$I_3 = 1 - 3\left(1 - \frac{2}{e}\right) = 1 - 3 + \frac{3 \cdot 2}{e} = 1 - \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{e} = 1 - 3!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{e}\right)$$

$$I_4 = 1 - 4\left(1 - 3 + \frac{3 \cdot 2}{e}\right) = 1 - 4 + 4 \cdot 3 - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{e} = 1 - \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{2!} - \frac{4!}{e} = 1 - 4!\left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{e}\right)$$

$$I_5 = 1 - 5\left(1 - 4 + 4 \cdot 3 - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{e}\right) = 1 - 5 + 5 \cdot 4 - 5 \cdot 4 \cdot 3 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{e} = 1 - \frac{5!}{4!} + \frac{5!}{3!} - \frac{5!}{2!} + \frac{5!}{e} = 1 - 5!\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{e}\right)$$

...

Assim, deduzimos que a fórmula para I_n é :

$$I_n = 1 - n!\left[\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-3)!} - \frac{1}{(n-4)!} + \ldots - (-1)^{n-1}\frac{1}{e}\right]$$

Então,

$$I_{100} = 1 - 100!\left(\frac{1}{99!} - \frac{1}{98!} + \frac{1}{97!} - \ldots - \frac{1}{2!} + \frac{1}{e}\right)$$

$$= 1 - 100!\left[\underbrace{\left(\frac{1}{99!} + \frac{1}{97!} + \ldots + \frac{1}{3!} + \frac{1}{e}\right)}_{\approx 0.718281803 \text{ (na calculadora)}} - \underbrace{\left(\frac{1}{98!} + \frac{1}{96!} + \ldots + \frac{1}{2!}\right)}_{\approx 0.543080634 \text{(na calculadora)}}\right] << 0$$

(b)

$$I_{200} \approx \frac{1}{201}$$

$$I_{199} = \frac{1 - I_{200}}{200} = \frac{1 - (1/201)}{200} = \frac{(200/201)}{200} = \frac{1}{201}$$

$$I_{198} = \frac{1}{201}$$

$$I_{100} = \frac{1}{201} \approx 0.004975$$

(c)

como em (b), $0 \leq \frac{1}{201} \leq \frac{1}{101}$, portanto o erro é maior em (a). A melhor maneira de calcular, então, é usar $I_{n-1} = \frac{(1 - I_n)}{n}$, porque em todas as iterações o resultado sempre converge para $\frac{1}{201}$.

Exercício 5:

Fonte: Howard Anton – "Cálculo, um novo horizonte" – Vol.2 – 6ª Edição – Ed. Bookman – pág. 60.

Uma das mais importantes de todas as séries divergentes é a série harmônica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$$

A série harmônica surge em conexão com os sons harmônicos produzidos pela vibração de uma corda musical. Não é evidente que esta série diverge. Entretanto, a divergência se tornará aparente quando examinarmos as somas parciais em detalhe. Como os termos da série são todos positivos, a soma parcial

$$S_1 = 1;$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2};$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3};$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4};$$

...

forma uma seqüência estritamente crescente

$$S_1 < S_2 < S_3 < \ldots < S_n < \ldots$$

Podemos provar a divergência demonstrando que não há nenhuma constante M (cota superior para a seqüência) que seja maior ou igual que suas somas parciais (veja o teorema no final do exercício). Para este fim, consideraremos algumas somas parciais selecionadas, isto é, $S_{2,} S_4, S_8, S_{16}, S_{32}, \ldots$ Note que os índices são potências sucessivas de 2, de modo que essas são as somas parciais da forma S_{2^n}. Essas somas parciais satisfazem as desigualdades:

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2}$$

$$S_4 = S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = S_2 + \frac{1}{2} > \frac{3}{2}$$

$$S_8 = S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > S_4 + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = S_4 + \frac{1}{2} > \frac{4}{2}$$

$$S_{16} = S_8 + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} > S_8 + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) = S_8 + \frac{1}{2} > \frac{5}{2}$$

.

.

.

$$S_{2^n} > \frac{n+1}{2}$$

Se M é uma constante qualquer, podemos achar o inteiro positivo n tal que (n+1)/2 > M. No entanto, para este n

$$S_{2^n} > \frac{n+1}{2} > M$$

de modo que nenhuma constante M é maior ou igual que cada soma parcial da série harmônica. Isso prova a divergência.

Teorema:

Se uma seqüência $\{S_n\}$ for crescente a partir de um certo termo, então existem duas possibilidades:

(a) Existe uma constante M, chamada de *cota superior* para a seqüência, tal que se $S_n \leq M$ para todo n a partir de um certo termo, e, neste caso, a seqüência converge a um limite L satisfazendo $L \leq M$.

(b) Não existe cota superior, e neste caso, $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$

Exercício 6:

n = 100

Procedimento (a): x = - 5

$$e^{-5} \approx \sum_{i=0}^{100} \frac{(-5)^i}{i!} = 1 + (-5) + \frac{(-5)^2}{2!} + \frac{(-5)^3}{3!} + \ldots + \frac{(-5)^{100}}{100!} \approx -146{,}4465 = -146446{,}5 \times 10^{-3}$$

Procedimento (b): x = 5

$$e^{-5} = \frac{1}{e^5} \approx \frac{1}{\sum_{i=0}^{100} \frac{5^i}{i!}} = \frac{1}{\underbrace{1 + 5 + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \ldots + \frac{5^{100}}{100!}}_{\approx 148{,}4123}} \approx \frac{1}{148{,}4123} = 6.737986003 \times 10^{-3}$$

O procedimento (b) é o melhor!